「代数学 2 環と体とガロア理論」の正誤表

1. p.17, 定義 1.3.18 の最後に「また $S$ を生成系，$S$ の元を生成元という.」と追加.
2. p.19, l.8, ここでも第 1 巻と同様に $S$ を「生成系」，その元を「生成元」というように (増刷のとき) 変更すると思う.
3. p.25, 定義 1.4.2 の後に「$I$ が $k$ 代数 $A$ の真のイデアルなら，$A/I$ も $k$ 代数になる.」と入れる.
4. p.28, l.-7, 商の順番 $\to$ 剰余の順番
5. p.37, $f(x) = ***$, $I = (f(x))$ とする. *** $A/I$ *** $I$ を含むものに対応する.
6. p.55, 定義 1.11.4, いろいろ意見もあったので，$\mathbb{Z}$ でない場合には,「公約数」$\to$「公約元」などと変更すると思う. 具体的には p.55, 56, 62, 63, 65, 66, 81,
7. p.59, l.1, $p_1, \ldots, p_n$ を互いに同伴でない素元
8. p.60 下から 2 行目 「明らかに $0 \in I$ である.」を入れる.
9. p.64, l.9, 「ガウスの補題」とよばれる命題 $\to$ 「ガウスの補題」とよばれるもの
10. p.81, 1.8.4, $S_1 \subset S_2 \subset A$ を乗法的集合，$B = S_1^{-1}A$ とし，$\phi : A \to B$ を自然な準同型とする. このとき，$0 \notin \phi(S_2), \phi(S_2)^{-1}B \cong S_2^{-1}A$ であることを証明せよ.
11. p.81, 1.11.4 は問題が間違っている. $B$ が $A$ の整拡大で $A$ が正規環であるような状況が頭にあったので，このような問題を考えた. そのような状況では正しいが一般には成り立たない. 機会があれば，別の問題に差し替える.
12. p.81, 1.11.9, $I$ を使っていない. 最初 $I$ を使った問題があったので、こうなった. $I^6 \cap J_1^3 \cap J_2^3 \cap J_3^3$ といったイデアルの生成元を求める問題を復活させる予定.
13. p.82, 1.11.13 (1) $\mathbb{Q}$ のなかで $\to$ $\mathbb{C}$ のなかで
14. p.94, 例 2.3.5, p.98, 例 2.4.6, 1.10 節は読み飛ばしてもよい節 (*つき) に指定しておいたので,「定義 1.10.2 参照」などと入れる予定.
15. p.95, 定義 2.3.8 (2) の最後に「また $S$ を生成系，$S$ の元を生成元という.」と追加.
16. p.102, 可能ならこのあたりで，次を挿入したい。

    命題 I–2.9.2 と同様にして，$M$ が $A$ 加群，$N_1, N_2 \subset M$ が部分 $A$ 加群で，$M = N_1 + N_2$, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ なら，$M = N_1 \oplus N_2$ である.
17. p.123, l.3, $X$ 上の関数 $\to$ $Y$ 上の関数

18. p.131, 命題 2.10.7 の前に，$f' : M_2 \to M_3$, $g' : N_2 \to N_3$ も準同型なら $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ であることを入れる．

19. p.132, 命題 2.10.10 (1) $A \otimes B \neq \{0\}$ なら，*** 零環は考えないということにしたので，この仮定が必要. (東京大の斎藤毅様ご指摘有難うございました.)

20. p.136, 定理 2.12.1, 「単元でない $e_1, \ldots, e_t$ で」，最後に,「ただし，$t = 0$ なら，$R/(e_1)$ などはの因子はないものと解釈する.」と入れる.

21. p.143 中間くらいの太字の部分, $S$ が $G$ の生成集合で $\to$ $S$ が $G$ を生成し，

22. p.148 4.3.1 のすぐ上, 幾分考察が $\to$ いくぶん考察が

23. p.162, l.2, $K$ 代数としての準同型はやはり加群としての準同型と区別したほうがよいと思うので，$K$ 代数としての準同型は $\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L_1, L_2)$ などと変更すると思う．以下も同様. 具体的には，p. 162, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 188, 189, 192, 194, 195, 198, 200, 246, 247, 248, 249

24. p.163, l.8, 「また $S$ を生成系，$S$ の元を生成元という.」と追加.

25. p.164 命題 3.1.17, (1)–(3) を (1), (2) と変える.

26. p.164, 系 3.1.18 の証明で 命題 3.1.17 (3) を 命題 3.1.17 (2) とする．また，(3) の証明を次のようにする.

    $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ とする．$A = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \ni \beta \neq 0$ なら，$\beta^{-1} \in K[\beta] \subset A$ となるので，$L = A$. 命題 2.7.7 (1) より $L$ は有限生成 $K$ 加群である.

    ここは少し欲張ったかもしれない。あたりまえでない元の最小多項式を求める方法として 2.7 節の有限性を使いたかったので，それに依存する形で書いたが，整拡大の概念を使わずに書くことも可能だった。例えば，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が $K$ 上代数的なら，$\alpha_n$ は $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ 上代数的なので，$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ の有限次拡大になる。よって，$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ・へ $K$ の有限次拡大になる。次の命題 3.1.19 を使うと $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は $K$ の代数拡大になる。(2) も 2.7 節のように，$L$ の元の $M$ 上の最小多項式の係数を $K$ に添加して有限生成の場合に帰着させればよい。こういったことについて，(増刷のときに) 可能なら少しコメントを追加するかもしれない。けれども後で例題の解答で共役を使った方法を使っているが，本当は 2.7 節の方法を使ったほうが効率的。

27. p.167, l.13, (命題 1.11.34) $\to$ (補題 1.11.33)

28. p.191, 3.3.1 (2) 問題と答えがあっていない. 問題を $x^4 + 4x + 7$ から $x^4 + 4x + 6$ に変更. これで答えとあう. (東北大学部 3 年の増田寛己様ご指摘有難うございました.)

29. p.198, 命題 4.1.13 の証明の最後から 2 行目, $[L, K] \to [L : K]$, 下から 6 行目，$s_1, \ldots, s_n \in K \to s_1, \ldots, s_n \in L$. (東北大の小林真一様ご指摘有難うございました.)

30. p.208, l.5, $\alpha_i, \beta_j$ 両方に関してモニックである. $\to$ $\alpha_i, \beta_j$ 両方に関してモニックの単元倍である.

31. p.217, 「3 次多項式のガロア群の例」とする

32. p.218, しかし $\mathrm{ch}\, K = 2 \to$ また，$\mathrm{ch}\, K = 2$

33. p.238, 下から 2 行目, $\sigma(b^n) = \sigma(b^n) \to \sigma(b^n) = b^n$ (立命館大の加川貴章様ご指摘有難うございました.)

34. p.272, 演習問題 4.16.1 (4) は $x^4 - 10x^2 + 5$ ならガロア群は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ でした. $x^4 - 10x^2 + 6$ という問題にします. (東北大の小林真一様ご指摘有難うございました.)

35. p.275, 1.4.2 の解答例 $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2), B = \mathbb{C}[x]$ $(A, B$ が逆).

36. p.27 の有限体 $\mathbb{F}_p$ を索引に入れる.

37. p.292, 第 1 巻のあとがき $\to$ 第 1 巻の参考文献

## 第 2 刷の正誤表

1. p.4, 一番下, $\mathrm{Aut}\, A \to \mathrm{Aut}^{\,\mathrm{al}} A$ (p.5 にかけて 6 箇所)

2. p.15, l.-2, $\mathrm{Aut}_{\,k} A \to \mathrm{Aut}^{\,\mathrm{al}}_{\,k} A$ (p.16 も 2 箇所)

3. p.25, 定義 1.4.2, $\mathfrak{m} \subset A$ が極大イデアルなら $A/\mathfrak{m}$ は体になる. このとき，$A/\mathfrak{m}$ を剰余体という. $\to$ 改行せずに，$A/\mathfrak{m}$ が体になるときは $A/\mathfrak{m}$ を剰余体という. なお，これは $\mathfrak{m}$ が後で定義する「極大イデアル」であることと・ッ値である (命題 1.7.3).

4. p.34, l.1, $\phi \to \pi$ 吉永彰成様ご指摘有難うございました.

5. p.58, 命題 1.11.12 の証明, 2 行目, $n \leqq m$, $p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m$ と変更. 段落の最後に. 「$n = 1$ なら $m = 1$ となり，命題が従う.」と挿入する.

6. p.63, l.2, 以下，この節の終わりまで，$\to$ 以下，例 1.11.41 を除きこの節の終わりまで，

7. p.63, 補題 1.11.31 の最初. $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$

8. p.75, l.8, $f_{m+1} \notin \to f_{m+1} \in$

9. p.77, 問題 1.3.1 (2), $a_3x^3 \cdots + \to a_3x^3 + \cdots +$

10. p.79, 問題 1.6.1–1.6.3, $\mathfrak{m}_1$ などを $I_1$ などと変更.

11. p.81, 問題 1.9.1, $\to$ を $\mapsto$ に変更 (3 箇所)

12. p.147, 例 2.13.12, 一般に $B/A$ が環の拡大のとき，$A[x_1, \ldots, x_n] \otimes_A B \cong B[x_1, \ldots, x_n]$ となるが，これを示すには $A[x_1, \ldots, x_n]$ を $A$ の無限個の直和として演習問題 2.10.6 を使う必要がある．しかし，ここでは $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ が有限次拡大であることからこの場合には簡単に示せる．結論からいうと，次のように直すと思う．

    $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\sqrt{-1}$ なので，命題 2.10.7 より $\mathbb{R}[x,y] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x,y] \oplus \mathbb{R}[x,y]\sqrt{-1} \cong \mathbb{C}[x,y]$ である．(一般の体の拡大 $L/K$ の場合は，$K[x,y]$ を無限個の $K$ の直和で表し，演習問題 2.10.6 を使う.) 命題 2.3.11 より，(この後もともとあった式)

    落合さんの HP を見てこうすればよいと思った．落合さん有難う．でもここを書いたとき，$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ が有限生成自由加群だからということを考えたような気もする．でも後で自分で読んで意味が通らなかったのだから，ここは不十分だった．これでここは意味が通るようになる．多少妥協しているが.

13. p.162, l.3, $A$ の環と***を $\mathrm{Aut}\, A, \mathrm{Aut}_K A$ と書く $\to$ $A$ の環と***を 1.1 節，1.3 節と同じく，$\mathrm{Aut}\, A, \mathrm{Aut}_K A$ と書く

14. p.166, l.7,「(2) は明らか.」を「剰余環の演算の定義より $f(x+(f(x))) = f(x)+(f(x)) = (f(x))$ なので，$f(\alpha) = 0$ である.」と可能なら変更する.

15. p.242, l.-10,「だったとしても」の後にいらないスペースがある.

16. p.250, 例 4.2.14, $n$ が素数でないと成り立たない．「$p$ を素数とする.」と入れ，$n$ を $p$ に変更する.

17. p.264, 補題 4.17.3 について，「$x = \sqrt{u + \sqrt{u^2+v^2}/2}$, $y = v/(2x)$ とすれば，$(x+y\sqrt{-1})^2 = u + v\sqrt{-1}$ であることを確かめよ」というのを演習問題にして，この演習問題を引用する．落合さん有難う.

    こう思ったが，演習問題を増やすと 1 ページ増えてしまうので，出来なかった.

18. p.283, l.-1, $\mathbb{F}_9$ の生成元 $\to$ $\mathbb{F}_9^\times$ の生成元

19. p.284, l.1, $\mathbb{F}_{25}$ の生成元 $\to$ $\mathbb{F}_{25}^\times$ の生成元

## 第 3 刷の正誤表

とりあえず落合さんのコメントに対応する.

1. p.273, 1.2.4, これは証明も何もいらないので，これだけ書けばよいという意味で「解答例」とした.

2. p.273, 1.2.5, $X_n$ の定義の後，$X_n$ には $\mathfrak{S}_n$ が作用し，その軌道の集合を $Y_n$ とする．$\{Y_n\}_n$ は集合族となり，(後は $X_n$ を $Y_n$ とする.) とにかく大きすぎないことを示すのがポイント.
3. p.274, 1.3.9 のヒントを $ad - bc \neq 0$ なら，$\phi$ が単射でないことを示せ．最後の「$b = c = 0$ ***」を削除.
4. p.4, l.3,「$\mathbb{H}$ は左からの積，右からの積どちらに関しても $\mathbb{C}$ 上の 2 次元のベクトル空間である.」と変更.
5. p.47, l.-5 の前に入れられれば,「なお $V(I) = \{a \in \mathbb{C}^n \mid {}^{\forall}h \in I, h(a) = 0\}$ である.」と入れる．レイアウトの関係で不可能かも.
6. p.51, l.-5, 少し前に「すべての素イデアルを考えたほうがよい」と説明したので，ここは極大イデアルではなく素イデアルと書きました.
7. p.56, 定義 1.11.6 (2), $b$ を既約元という $\to$ $a$ を既約元という (読者による指摘)
8. p.59, l.4, $p_1^{\beta_1}, \ldots, p_n^{\beta_n}$ を $p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ とする.
9. p.66, l.-9, $p_N^{\alpha_N}$ を $p_i^{\alpha_i}$ とする.
10. p.131, l.-7, 間違いではないが，$M \otimes N \cong$ を

    $$M \otimes N \cong k^m \oplus \cdots \oplus k^m \cong k^{nm}$$

    とするともう少しわかりやすい.
11. p.222, l.-3, 間違いではないが，$\Phi_n(x)$ が原始多項式であることの証明を次のように追・チ.

    $\Phi_n(x)$ は

    $$\Phi_n(x) = x^{\phi(n)} + \sum_{i=1}^{\phi(n)} (a_i/d) x^{n-i} \quad (a_1, \ldots, a_{\phi(n)}, d \in \mathbb{Z})$$

    と表せる．もし $m = \mathrm{GCD}(a_1, \ldots, a_{\phi(n)}, d) > 1$ なら，約分できるので，$m = 1$ としてよい．すると，$d\Phi_n(x)$ は原始多項式である.

    スペースが足りなくなったら，l.-17 の「$f'(x) = nx^{n-1}$ である.」を「$f'(x) = nx^{n-1}$.」とすれば，1 行稼げて，それで十分だと思う.
12. p.275, 問題 1.4.2 の解答例, $A = \mathbb{C}, B = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ でもよいですが，$A$ として体でない整域の例にしたかったので，こうなりました.
13. p.295, 索引に $I(X)$ p.20, $V(I)$ p.47, $\mathfrak{m}_a$ p.20, 51 を追加.

14. p.300, 「普遍性」　p40, 102, 127　を索引に追加.

第 4 刷の正誤表

1. 定理 3.3.21 の後，この時点で「$\alpha \in L$ が $K$ 上分離的なら，$K(\alpha)/K$ は分離的，つまり $K(\alpha)$ のすべての元が $K$ 上分離的であることがわかる．」と入れる．
2. p.224, l.3, $\mathrm{GCD}(i, n) = 1$ なら $\mathrm{GCD}(ip, n) = 1$ となるので，$\zeta^p \in X$ であり，$\Phi_n(\zeta^p) = 0$ となる．
3. p.258, l.11, 「$(1\,2)\sigma(1\,2) = \sigma$ なので *** 段落の終わり」を 「$(\sigma(1)\,\sigma(2)) = \sigma(1\,2)\sigma^{-1} = (1\,2)$ なので $\sigma(1) = 1, 2$ である．よって，$H$ は $\{1, 2, 3, 4\}$ に推移的に作用しない．これは矛盾なので，$H$ は互換を含まない．段落の最後の文」とする．
4. 演習問題 4.8.2 に $m > 1$ という条件を入れる．

第 5 刷の正誤表

1. 前回の追加: 定理 3.3.21 の後，この時点で「$\alpha \in L$ が $K$ 上分離的なら，$K(\alpha)/K$ は分離的，つまり $K(\alpha)$ のすべての元が $K$ 上分離的であることがわかる．」と入れる．これは定理 3.3.21 の証明の後のつもりだった．これを証明の後に移動し,「この定理により，$\alpha \in L$ が $K$ 上分離的なら，$K(\alpha)/K$ は分離的，つまり $K(\alpha)$ のすべての元が $K$ 上分離的であることがわかる．」 とする．
2. 命題 1.2.10, $g(x) \in A(x)$ を $g(x) \in A[x]$ と変更.
3. p.13,l.-6, $1 \in A$ を $1 \in B$ と変更.
4. 補題 1.11.31 の証明の 2 行目 $(b_i, c_i \in A)$ を $(b_i, c_i \in A,\ i = 0, \ldots, n)$ と変更.
5. p.106, 例 2.5.5, $\mathrm{Ker}(T_A) = \{0\}$ を $\mathrm{Ker}(T_A) = \{[0, 0, x_3] \mid x_3 \in \mathbb{Z}\}$ と変更.
6. p.118, l.-10, $A$ 加群とする．$\to$ $B$ の部分 $A$ 加群とする．l.-1, 命題 1.2.8 (1) より $\deg f(x)g(x) \geqq n$ となる．$\to$ 命題 1.2.8 (2) より $\deg(f(x)g(x)) \geqq n$ となる．
7. p.119, l.-6, 間違いではないが,「よって,」の後に「この行列を列ベクトル $y = [y_1, \ldots, y_\ell]$ にかけ，第一成分を考えると,」と入れる．
8. p.126, l.-12, 間違いではないが,「$J$ は有限生成なので,」を「$A$ がネーター環なので，$J$ は有限生成である．よって,」と変更.
9. p.126, l.-5, $N_2 = \langle \phi(z_1), \ldots, \phi(z_m) \rangle$ と変更.
10. p.126, l.-2, $n \in$ を $w \in$ と変更.

11. p.159, l.6, $\mathrm{Im}(\phi)$ は $k$ の部分環なので $\to$ $\mathrm{Im}(\phi)$ は $K$ の部分環なので

12. p.92, l.-1, 最初の $\in$ を $\ni$ と変更.

13. 井上亜星様以下の 13–47 ご指摘有難うございました. p.24, l.5, $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ とする.

14. p.32, l.-5, 「同型である.」を「同型 $A/(I_1 \cap I_2) \to A/I_1 \times A/I_2$ を引き起こす.」と変更.

15. p.64, l.12, 「$K[x]$ で $g(x)$ において」を「$K[x]$ において $g(x)$ で」と変更.

16. p.81, l.4, 「$\{0\}, K$ 以外の両側イデアル」を「$\{0\}, R$ 以外の両側イデアル」に変更.

17. p.278, 1.12.1 (5) の解答例, $f(-4)$ は $f(-6)$

18. p.84, l.-2, 行列という $\to$ 行列ともいう

19. p.88, 定理 2.1.9, 定義 2.1.10, 間違いではないが 可換体 $\to$ (可換) 体

20. p.95, 例 2.3.10, 「$K$ を体, $****\in K^n$ とする.」と変更.

21. p.96, l.-1, $\overline{S}$ を $S$ と変更.

22. p.99, l.-2, $M \to N$ を $f : M \to N$ と変更.

23. p.151, 演習問題 2.4.9, 加除 $\to$ 可除 (2 箇所)

24. p.107, 命題 2.5.7 の 3,4 行目, $\mathrm{Coker}(T_{AQ})$ を $\mathrm{Coker}(T_{AQ^{-1}})$ と変更. $Q = I_m$ を $Q = I_n$ と変更.

25. p.104, 間違いではないが,「階数」を索引に入れる.

26. p.17, l.-10, $g' = I_n$ を $g' = I_{n-1}$ と変更.

27. p.117, l.-5, 間違いではないが,「よって,」を「$N$ の元の共役は $N$ の元になるので,」と変更.

28. p.153, 2.6.6, $X, Y$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に変更.

29. p.153, 2.6.7, $x^4 = y^2 = I_3$ とする. 1 行目は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ が正しい.

30. p.154, 2.7.5, $\mathrm{ch}\, k \neq 2$ を削除し，文の後に新たな文「また，$K$ は $\mathbb{Q}$ を含むとする.」を入れる.

31. p.123, 定義 2.8.1 (3) 「真に細分できない***」とする.

32. p.155, 2.7.10, 「すべての $i$」を「すべての $2 \leqq i \leqq n$」に変更.

33. p.130, l.-4, $i \circ p$ は $p \circ i$. l.-3 の $i \circ p$ は正しい.

34. p.131, 命題 2.10.8 の後の 1 行目. 「$M \otimes N$ と書くこともある. 」に変更. 命題 2.10.9 の 1 行上. 「$M \otimes_k N$ $(= M \otimes N)$」に変更.

35. p.133, l.1,9,13, $\phi : A \to B, \psi : B \to C$ をそれぞれ $\alpha : A \to B, \beta : B \to C$ に変更.

36. p.157, 問 2.10.7 2 行目, $\{x_i\}, \{y_j\}$ それぞれ $\to$ $\{x_i\}, \{y_j\}$ をそれぞれ

37. p.135, 命題 2.11.4 の証明の 5 行目, 間違いではないが,「$f^*$ の表現行列とすると」を「$f^*$ の表現行列とすると ($h^*_{ji}$ は $H^*$ の $(j, i)$ 成分)」と変更.

38. p.141, l.-1, $1 \leqq t \leqq t$ の前の文の最後を「$T$ あるいは $T_A$ とする (2.5 節参照).」とする. p.156, 2.10.1, 「$T_A, T_B$ (2.5 節参照)」とする.

39. p.148　命題 2.13.16 の証明　5 行目 $i_{n-1} \circ \overline{d}_n = d_n$

40. p.266, 間違いではないが，索引で $k$-代数 p.53 も加える.

41. p.282, 3.1.13 (3) の答え, $x^3 + 2\sqrt{-1}$ と変更.

42. p.267, 4.1.9 $K^G = \mathbb{C}(j)$ を $K^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}(j)$ と変更.

43. p.286, 4.1.14 の答え，$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{3})$ を $\mathbb{Q}(\omega^2 \sqrt[3]{3})$ と変更.

第 6 刷の正誤表

1. 井上亜星様以下の 1–5 ご指摘有難うございました. p.221, l.-13, $n > 1$ を $n > 0$ と変更.

2. p.221, 定義 4.7.2, 最後に「なお $\Phi_1(x) = x - 1$ である.」と追加.

3. p.241, l.-11, $G_{i-1} = \mathrm{Gal}(L/F_{i-1})$ を $G_{i-1} = \mathrm{Gal}(F/F_{i-1})$ と変更.

4. p.288, 問 4.7.7 (3) の答え，$s^4 + s^3 + 2s^2 - 4s + 3 = 0$.

5. p.258, l.-1, $y_2$ を $y^2$ と変更.

6. 2 章で行列の積を定義する前に積の転置が書いてあるのを解消する.

7. 例 3.4.9 (3)

8. p.168, 命題 3.1.32 (3) $L$ の $\to$ $K(\alpha)$ の

第 8 刷の正誤表

1. p.245, l.5, $L$ の $S''$ に関する $\to$ $m$ の $S'$ に関する

2. p.112, l.4, $a > 0$ を整数 $\to$ $n > 0$ を整数