志村対応において$SL_2(\mathbb{Z})$の保型形式とヘッケ加群として同型になる部分空間の構成

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
修士 2 年
学籍番号: 0530-27-7816
竹内和也

平成 29 年 2 月 3 日

目 次

1　はじめに

保型形式等の定義は 3 章以降に記述することにし, まず論文 [6] が書かれた背景について記述する. [10, Shimura], [8, Niwa] により, 重さ半整数のカスプ形式の空間から重さ整数のカスプ形式の空間への対応が構成された. また, [9, Niwa] で重さ半整数の保型形式のヘッケ作用素のトレースを計算することにより, ヘッケ加群として $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ と $S_{k-1}(\widetilde{\Gamma}_0(2))$ の同型が示された.

論文 [6] の概要は以下のようなものである.

> $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ を部分空間で制限して志村対応を作用させる. このとき, 像のレベルが 2 ではなく 1 になる. また, ヘッケ加群として制限した部分空間と $S_{k-1}(\Gamma)$ が同型である.

Kohnen の論文 [6] の主張を述べる. ここで特に断らない限り, k を奇数, λ を $\frac{k}{2}$ の整数部分, $2\lambda = k-1$ とする. 証明は 6 章で行う.

まず $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)), S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の部分空間 $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)), S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ を次のように定義する.

定義 1.1. コーネンプラススペースを次のように定義する.

$$M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \,\middle|\, a(n) = 0 \left((-1)^\lambda n \equiv 2, 3 \pmod 4\right) \right\},$$
$$S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \cap S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)).$$

ここで概要で述べた主張を述べる.

定理 1.2. (i) 作用素 $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ は $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)), S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ をそれぞれ自身へうつす. また, $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ でエルミート作用素となる.

(ii) $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ はすべての素数 p に対する $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ に関する同時固有形式の基底を持つ. 同じ固有値を持つ同時固有形式は 0 でない複素数倍を除いて一意的である. また, f が同時固有形式で素数 p に対し, $f|T^+_{\frac{k}{2}}(p^2) = \lambda_p f$ とする. このとき, $S_{k-1}(\Gamma)$ の元の F が定数倍を除いて一意的に定まり, $F|T_{k-1}(p) = \lambda_p F$ となる. また f, F の q 展開を $f(z) = \sum a(n)q^n, F(z) = \sum A(n)q^n$ とし, D を 1 または 2 次体の判別式で, $(-1)^\lambda D > 0$ であれば

$$L\left(s - \lambda + 1, \left(\frac{D}{-}\right)\right) \sum_{n \geqq 1} a(|D|n^2)n^{-s} = a(|D|) \sum_{n \geqq 1} A(n)n^{-s}.$$

(iii) D を 1 または 2 次体の判別式で $(-1)^\lambda D > 0$ を満たすものとする. $(D, k) \neq (1, 1)$ のとき, 写像 $\mathscr{S}^+_{D,k}$ を

$$\sum_{n \geqq 0} b(n)q^n \mapsto \frac{b(0)}{2} L\left(1 - \lambda, \left(\frac{D}{-}\right)\right) + \sum_{n \geqq 1} \left(\sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{\lambda-1} b\left(\frac{n^2}{d^2}|D|\right) \right) q^n$$

で定義する．これは $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \to M_{k-1}(\Gamma), S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \to S_{k-1}(\Gamma)$ の写像となり，ヘッケ作用素と可換である. また, 同型となる $\mathscr{S}^+_{D,k}$ の線形結合が存在する.

(iii) で与えられた $\mathscr{S}^+_{D,k}$ はコーネンプラススペースでの志村対応にあたるものである. これから述べる 2 つの定理は $\mathscr{S}^+_{D,k}$ の具体的な計算結果である.

定理 1.3. λ を偶数とする. $\mathscr{S}^+_{1,k}$ の $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ への制限の像は $L_g(\lambda) \neq 0$ を満たすような正規化された同時固有形式 $g \in S_{k-1}(\Gamma)$ で生成される. また, 写像 $\mathscr{S}^+_{1,k}$ が同型であることとすべての正規化された同時固有形式 $g \in S_{k-1}(\Gamma)$ に対し $L_g(\lambda) \neq 0$ となることは同値である.

系 1.4. λ を偶数, r を $S_{k-1}(\Gamma)$ の次元とする. 正規化された同時固有形式 $g \in S_{k-1}(\Gamma)$ は少なくとも $[\sqrt{2r}]$ 個 $L_g(\lambda) \neq 0$ を満たす.

基本判別式 $D > 1$ を固定し, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ とし, l を 2 以上の偶数とする. K に対する重さ l のヘッケアイゼンシュタイン級数 $g^K_l(z, z')(z, z' \in \mathbb{H})$ は

$$g^K_l(z, z') = \frac{1}{4}\zeta_K(1-l) + \sum_{\substack{\nu \in \delta_K^{-1} \\ \nu \gg 0}} \left(\sum_{\mathfrak{a} | (\nu)\delta_K} \mathrm{N}(\mathfrak{a})^{k-1} \right) e^{2\pi i(\nu z + \nu' z')}$$

で定義される [4, Hecke]. ζ_K は K 上のデデキントゼータ関数で, 内側の和は整イデアル $(\nu)\delta_K$ を割るイデアル $\mathfrak{a}$ 全体を渡る.

g^K_k は $\mathrm{SL}_2(O_{\underline{K}})$ における重さ l のヒルベルト保型形式でフーリエ展開係数は定数項を除いて有理整数である.

$M^{\mathbb{Z}}_{2l}$ は定数項を除いた展開係数が整数の $M_{2l}(\Gamma)$ 全体とする. g^K_l の対角線おける制限 $G^K_{2l}(z) = g^K_l(z, z)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 $M^{\mathbb{Z}}_{2l}$ に含まれる. 加群 $M^{\mathbb{Z}}_{2l}$ はランク $\dim M_{2l}(\Gamma)$ の自由加群で, $M_{2l}(\Gamma) = M^{\mathbb{Z}}_{2l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ である. 次の定理 1.5 は [13, Zagier] の計算による結果である.

定理 1.5. l を 2 以上 10 以下の偶数とし, K は

$$\{\mathbb{Q}(\sqrt{2})\} \cup \{\mathbb{Q}(\sqrt{p}) | p \text{ は } (p-1) \text{ が } l \text{ を割らない素数}\} \tag{1.6}$$

を除いた実 2 次体とする. 関数 G^K_{2l} は以下の表で与えられる格子 $M^{HE}_{2l} \subset M^{\mathbb{Z}}_{2l}$ に含まれる.

l	M_{2l}^{MH} の基底	$[M_{2l}^{\mathbb{Z}} : M_{2l}^{MH}]$
2	$\dfrac{1}{24}E_4$	$2 \cdot 5 = 10$
4	$\dfrac{1}{240}E_4^2$	2
6	$\dfrac{1}{24}E_4^3, \dfrac{5}{504}E_6^2$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 = 46,800$
8	$\dfrac{7}{480}E_4^4, \dfrac{5}{12}E_4E_6^2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 171,360$
10	$\dfrac{147}{8}E_4^5, \dfrac{5}{264}E_4^2E_6^2$	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 = 7,938,000$

謝辞

セミナーや本修士論文作成にあたりご多忙の中ご指導ご鞭撻を頂いた雪江明彦先生に心から深く感謝申し上げます.

2　本論文の準備

ここで本論文で用いる記号や言葉の定義を行う. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ でそれぞれ自然数の集合, 整数の集合, 有理数の集合, 実数の集合, 複素数の集合を表す. また, $\mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{Z}_{>0}$ は正の有理数の集合, 正の整数の集合を表す. $a \in \mathbb{R}$ に対して, $[a]$ で a の整数部分を表す. 正の整数 n, m に対し, (n, m) で n と m の最大公約数を表す. 正の整数 n, k に対して約数関数 $\sigma_k(n)$ を

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

と定義する. また $s \in \mathbb{C}$ に対してリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定める. これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する. $\mathbb{H}$ を上半平面

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$$

とし, $z \in \mathbb{H}$ に対し $q = e^{2\pi iz}$ とする. $z \in \mathbb{C}$ に対する平方根 $\sqrt{z}$ を偏角が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ となるようにとり, $z^{\frac{k}{2}} = \left(\sqrt{z}\right)^k$ とする. また $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする.

ルジャンドル記号, ヤコビ記号とその拡張を定義する. p を奇素数とする. ルジャンドル記号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ を

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}0 & (a \text{ と } p \text{ が互いに素でないとき}) \\ 1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき}) \\ -1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方非剰余のとき})\end{cases}$$

と定義する. また, 奇数 m の素因数分解を $m=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ とするとき, ヤコビ記号 $\left(\frac{a}{m}\right)$ を

$$\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1}\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)^{e_r}$$

と定義する. さらにヤコビ記号の拡張する. 負の奇数 d に対して,

$$\left(\frac{a}{d}\right)=\begin{cases}\left(\frac{a}{|d|}\right) & (a>0) \\ -\left(\frac{a}{|d|}\right) & (a<0)\end{cases}$$

と定義し, さらに

$$\left(\frac{0}{\pm 1}\right)=1,$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)=\begin{cases}1 & (n\equiv \pm 1 \pmod 8) \\ -1 & (n\equiv \pm 3 \pmod 8) \\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

とする. また, 奇数 d に対して $\varepsilon_d=\sqrt{\left(\frac{-1}{d}\right)}$ すなわち,

$$\varepsilon_d=\begin{cases}1 & (d\equiv 1 \pmod 4) \\ i & (d\equiv 3 \pmod 4)\end{cases}$$

とする. 次にディリクレ指標について定義する. 詳しくは [16, 雪江, pp.49-56] にある. χ を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{T}$ への関数とする. χ が次の 4 つの条件を満たすとき, χ を n を法とするディリクレ指標という.

(1) $a\equiv b \pmod 4$ ならば $\chi(a)=\chi(b)$.

(2) すべての整数 a,b に対し, $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$.

(3) $(a,n)\neq 1$ ならば $\chi(a)=0$

(4) $\chi(1)=1$.

M が有限集合ならば, M の元の個数を $\#M$ で表す. 整数 a を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の元としてみるとき, $\overline{a}$ と表す. G を群とし, $g \in G$ で生成される部分群を $\langle g \rangle$ で表す.

K を代数体とし, O_K を K の整数環, δ_K を K の共役差積とする. また K を n 次代数体とするとき, $v \in K$ に対し $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(n)}$ で v の K での共役を表すことにし, v が総正な元のとき $v \gg 0$ と表す. また二次体の判別式となる整数を基本判別式といい, D が基本判別式となるとき, 平方因子を持たない整数 d を用いて,

$$D = \begin{cases} d & (d \equiv 1 \pmod 4) \\ 4d & (d \equiv 2, 3 \pmod 4) \end{cases}$$

とかける.

3 重さ整数の保型形式

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ や, その合同部分群に対する重さ整数の保型形式を定義する. まず, $SL_2(\mathbb{Z})$ や合同部分群について定義する.

定義 3.1. $\Gamma, \Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$ を次のように定義する.

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, ad - bc = 1 \right\},$$
$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod N \right\},$$
$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1 \pmod N \right\},$$
$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) \,\middle|\, b \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

$\Gamma(N)$ を含む Γ の部分群をレベル N の合同部分群といい, 特に $\Gamma(N)$ はレベル N の主合同部分群という.

次に Γ の $\mathbb{H}$ への作用を定義する.

定義 3.2. $\widetilde{\mathbb{C}}$ をリーマン球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \in \widetilde{\mathbb{C}}$ に対して, 一次分数変換を

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \gamma\infty = \frac{a}{c}$$

と定める.

この作用は Γ による $\widetilde{\mathbb{C}}$ への作用となっている.

$z \in \mathbb{H}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ とする.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\gamma z) &= \mathrm{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \mathrm{Im}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(adz+bc\overline{z})}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ad-bc)\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}z}{|cz+d|^2} > 0\end{aligned}$$

より $\gamma z \in \mathbb{H}$ となる. よって, 一次分数変換は Γ による $\mathbb{H}$ への作用となっていることがわかる. 同様にして, Γ による $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ への作用も定義でき, $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ とすると, Γ は $\overline{\mathbb{H}}$ に作用する. $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ をカスプという.

一般に群 G が集合 X に作用するとき, 集合は軌道の直和となる. いま, Γ の部分群 Γ' で 2 点 $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{H}}$ に対し, ある $\gamma \in \Gamma'$ が存在して $z_2 = \gamma z_1$ となるとき, z_1 と z_2 は Γ' 同値という. さらに $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の Γ' 同値類の代表元を Γ' のカスプという.

例 3.3. 任意の既約分数 $\frac{a}{c}$ に対して, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ が存在して

$$\frac{a}{c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty$$

となる. よって, Γ のカスプは ∞ のみとなる.

後に $\Gamma_0(4)$ に対する保型形式を多く考えるので, $\Gamma_0(4)$ のカスプを決定する.

命題 3.4. $\Gamma_0(4)$ のカスプは $\infty, 0, \frac{1}{2}$ である.

この証明に入る前に次の補題を示す.

補題 3.5. 次の自然な群準同型写像 ϕ は全射である.

$$\phi : SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

証明. $A \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. このとき $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ である.

以下行列の計算は $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 内での計算として考える. まず a, c でユークリッドの互除法を行う. ここで $D = (a, c)$ とする. $a = Da', c = Dc'$ とすると, $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ より $D(a'd - bc') \equiv 1 \pmod{N}$. よって $D \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$. そこで $DD' \equiv 1 \pmod{N}$ とする.

$$\begin{aligned} a &= ck_1 + r_1, \\ c &= r_1 k_2 + r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} k_n + D, \end{aligned}$$

$$r_{n-1} = Dk_{n+1}.$$

そこで n が奇数のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を, A に左からかけることによって

$$\begin{pmatrix} D & x \\ 0 & D' \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

となる. また, n が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を, A に左からかけることによって

$$\begin{pmatrix} 0 & -D' \\ D & x \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

となる. ここで D と斜向かいの成分が決まるのは, A の左側にかけたものは全て行列式が 1 であり, A の行列式は N を法として 1 であるから, $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の中で計算した結果の行列式も N を法として 1 となるからである. そして n が奇数のとき (3.6) に $\begin{pmatrix} 1 & -Dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を, n が偶数のとき (3.7) に $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -Dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を, 左からかけることによって

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$$

となる.

ここで

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D'-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D'-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D-1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, n が奇数のとき A は

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D'-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D'-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D-1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり右辺を $M_2(\mathbb{Z})$ の元と見ると, 行列式が 1 だから $SL_2(\mathbb{Z})$ の元である. 同様に, n が偶数のとき A は

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & k_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D'-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D'-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D-1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり右辺を $M_2(\mathbb{Z})$ の元と見ると, 行列式が 1 だから $SL_2(\mathbb{Z})$ の元である. よって $A \in \mathrm{Im}(\phi)$ である.

ここで上のことは $|a| > |c|$ のときを考えていたが, $|c| > |a|$ のときは A の左から $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をかけたものをまた A と置き換えればよい. □

命題 3.4 の証明にはいる.

命題 3.4 の証明. 無限遠点を固定する Γ の固定部分群 Γ_∞ は

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| j \in \mathbb{Z} \right\}$$

である. $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \Gamma/\Gamma_\infty$ の $\Gamma_0(4)$ 同値類を考えればよい. よって $\Gamma_0(4)\backslash\Gamma/\Gamma_\infty$ の代表元を考える.

補題 3.5 から準同型 $\Gamma \to SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が全射準同型であり, 核が $\Gamma(N)$ であったことから

$$\Gamma(4)\backslash\Gamma \cong SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

となる. また $\Gamma(4)\backslash\Gamma_0(4)$ を H とすると,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \right\}$$

である. よって

$$\Gamma_0(4)\backslash\Gamma \cong H\backslash SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

となる.

X を $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ の $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型な部分群の集合とする. $F \in X$ の生成元を $\langle(\overline{\alpha}, \overline{\beta})\rangle (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \overline{\alpha} = \alpha \bmod 4, \overline{\beta} = \beta \bmod 4)$ とする. $F \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ より $2 \nmid \alpha$ または $2 \nmid \beta$ となるから, $F = \langle(\overline{1}, \overline{\beta})\rangle (\beta = 0, 1, 2, 3)$ または $F = \langle(\overline{2\gamma}, \overline{1})\rangle (\gamma = 0, 1)$ となる.

$(\overline{0}, \overline{1})H = (\overline{0}, \overline{1})$ である. $c = Dc', d = Dd' (p \nmid D = \gcd(c, d))$ に対して $ad' - bc' = 1$ となるように a, b を取ると $(\overline{0}, \overline{1}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\overline{c}, \overline{d}) = (\overline{0}, \overline{1})$ となるから H は $(\overline{0}, \overline{1})$ の安定化群となり, X は $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の等質空間となる. よって $\Gamma_0(4)\backslash\Gamma$ の代表元として

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\gamma & 1 \end{pmatrix} (\beta = 0, 1, 2, 3, \gamma = 0, 1) \tag{3.8}$$

がとれる.

次に, Γ_∞ を (3.8) の元に作用させる. まず $(\overline{1}, \overline{\beta})$ については,

$$(\overline{1}, \overline{\beta}) \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\overline{1}, \overline{\beta + n})$$

より $(\overline{1},\overline{\beta})$ はすべて $(\overline{1},\overline{0})$ と同じ軌道に属し, $(\overline{1},\overline{0})$ から定まるカスプは対応する行列を ∞ に作用させて,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \infty = 0$$

より 0 である.

次に $(\overline{2\gamma},\overline{1})$ については,

$$(\overline{2\gamma},\overline{1}) \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\overline{2\gamma}, \overline{2\gamma n + 1}\right).$$

ゆえに

$$\left\langle \left(\overline{2\gamma}, \overline{2\gamma n+1}\right) \right\rangle = \left\langle \left(\overline{2}\frac{\overline{\gamma}}{\overline{2\gamma n+1}}, \overline{1} \right) \right\rangle.$$

各 γ に対して同じ軌道に入るものを個別に計算する.

2 を法として $2\gamma n + 1 = 1$ だから

$$\left\langle \left(\overline{2}\frac{\overline{\gamma}}{\overline{2\gamma n+1}}, \overline{1} \right) \right\rangle = \left\langle (\overline{2\gamma}, \overline{1}) \right\rangle.$$

よって $(\overline{2\gamma},\overline{1})$ は γ が異なれば互いに移り合わないから異なる軌道に入る. それぞれのカスプは対応する行列を ∞ に作用させて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\gamma & 1 \end{pmatrix} \infty = \begin{cases} \infty & (\gamma = 0) \\ \frac{1}{2} & (\gamma = 1) \end{cases}$$

となる. よって, $\Gamma(4)$ のカスプは $0, \infty, \frac{1}{2}$ の 3 個となる. □

ここで Γ の部分群 Γ' に対する基本領域を定義する.

定義 3.9. F を $\mathbb{H}$ 内の単連結な閉領域とする. Γ の部分群 Γ' に対し,

(i) 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対してある $w \in F, \gamma \in \Gamma'$ が存在して $z = \gamma w$ となる.

(ii) F の内点 z_1, z_2 は Γ' 同値とならない.

の 2 つが成り立つとき, F を Γ' の基本領域という.

基本領域の境界上の点については Γ' 同値になってもよいことを注意する.

次に合同部分群 Γ' に対する重さ整数の保型形式を定義する.

定義 3.10. $f(z)$ を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対して, $f(z)|[\gamma]_k$ を

$$f(z)|[\gamma]_k = (\det\gamma)^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k} f(z)$$

と定義する.

これは $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{H}$ 上の有理型関数全体の集合への作用となっている.

定義 3.11. $f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数, Γ' をレベル N の合同部分群とする. 次の 2 条件が成立するとき, $f(z)$ を Γ' に対する重さ k の保型関数という.

(1) $f(z)$ は任意の $\gamma \in \Gamma'$ に対し,
$$f(z)|[\gamma]_k = f(z)$$
を満たす.

(2) $f(z)$ は任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し, $q_N = e^{\frac{2\pi i z}{N}}$ を用いて,
$$f(z)|\,[\gamma_0]_k = \sum_n a(n)q_N^n \text{ (ただし十分小さい } n \text{ に対し } a(n) = 0) \tag{3.12}$$
という形のフーリエ展開を持つ.

このような保型関数 $f(z)$ が $\mathbb{H}$ 上正則であり, 任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し 展開 (3.12) においてすべての負の整数 n において $a(n) = 0$ となるとき, $f(z)$ を Γ' に対する重さ k の保型形式といいい, この関数の集合を $M_k(\Gamma')$ とかく. さらに保型形式 $f(z)$ が任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し 展開 (3.12) において $a(0) = 0$ となるとき, $f(z)$ を Γ' に対する重さ k のカスプ形式といいい, この関数の集合を $S_k(\Gamma')$ とかく.

注 3.13. (1) (3.12) の展開を q_N 展開と呼び, 特に $N = 1$ のとき q 展開と呼ぶ.

(2) Γ に対する重さ奇数の保型関数は 0 のみである. ゆえにこれ以降 Γ に対する保型関数, 保型形式, カスプ形式の重さは偶数とする.

(3) 保型関数, 保型形式, カスプ形式は加法, スカラー倍でも保たれる. よってそれぞれ複素ベクトル空間となる. さらに重さ k_1, k_2 の保型関数の積, 商は重さ k_1+k_2, k_1-k_2 の保型関数となる.

様々な保型形式の具体例を見る.

定義 3.14. k を 2 より大きい偶数とする. $z \in \mathbb{H}$ に対し,
$$G_k(z) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k}$$
で定義する. ただし和は $(0, 0)$ を除くすべての整数の組を渡る. この $G_k(z)$ をアイゼンシュタイン級数という.

$k > 2$ という条件は $\mathbb{H}$ の任意のコンパクト部分集合で絶対一様収束する条件となっている. アイゼンシュタイン級数に対する基本的な性質を次の命題であげる.

命題 3.15. [5, Koblitz, pp.110-111, Propositions 5, 6]
アイゼンシュタイン級数 $G_k(z)$ は Γ に対する重さ k の保型形式である. また, 次のようなフーリエ級数展開を持つ.

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\left(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\right).$$

ただし, B_k はベルヌーイ数である.

アイゼンシュタイン級数を $2\zeta(k)$ で割り, q 展開の定数項の部分を 1 にしたものを正規化されたアイゼンシュタイン級数といい, $E_k(z)$ と書く. $E_k(z)$ の q 展開の係数は有理数になっている.

補題 3.16. [5, Koblitz, p.111]
正規化されたアイゼンシュタイン級数は次と等しい.

$$E_k(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ \gcd(m,n)=1}}\frac{1}{(mz+n)^k}.$$

これは m, n の最大公約数で先にくくりだすことを考えれば容易に得られる.

定義 3.17. E_2 を

$$E_2(z) = 1 + \frac{6}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^2}$$

と定義する.

E_2 は和が絶対収束しないため $z \mapsto -\frac{1}{z}$ の変換でうまく変換されない. 次の命題はその変換のずれがどれほど出るかを示したものである.

命題 3.18. [5, Koblitz, p.113, Proposition 7]

$$z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = E_2(z) + \frac{12}{2\pi iz}.$$

次に Γ に対するカスプ形式の例を見る.

定義 3.19. デルタ関数を

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}\left(E_4(z)^3 - E_6(z)^2\right)$$

で定義する. これは Γ に対する重さ 12 のカスプ形式である.

デルタ関数のカスプ条件は E_4, E_6 のカスプ ∞ での値からすぐに分かる. 次に $\Gamma_0(4)$ における保型形式の例をあげる.

命題 3.20. [5, Koblitz, p.145]
　$z \in \mathbb{H}$ に対し, テータ関数を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$$

で定義する. このとき,

$$\theta^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$$

となる. さらに各カスプでの値は

$$\theta^4(\infty) = 1, \theta^4(0) = -\frac{1}{4}, \theta^4\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

である.

　θ^k の n 番目の q 展開係数は k 個の平方和が n になる整数解の個数となっている.
　次に θ の $\Gamma_0(4)$ での作用の変換公式を見る. そのために次の関数を定義する.

定義 3.21. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4), z \in \mathbb{H}$ に対して $j(\gamma, z)$ を

$$j(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} \sqrt{cz + d}$$

と定義する.

　$j(\gamma, z)$ は $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(4), z \in \mathbb{H}$ に対し,

$$j(\gamma_1 \gamma_2, z) = j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)$$

を満たす.

定理 3.22. [5, Koblitz, p.148, Theorem]
　任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ と $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$\theta(\gamma z) = j(\gamma, z) \theta(z)$$

が成り立つ.

　$\Gamma_0(4)$ に対する保型形式の例をもう一つあげる.

命題 3.23. [5, Koblitz, p.145]

$$F(z) = -\frac{1}{24} \{E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z)\} = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ は奇数}}} \sigma_1(n) q^n \tag{3.24}$$

とする. このとき,

$$F(z) \in M_2(\Gamma_0(4))$$

となる. さらに各カスプでの値は

$$F(\infty) = 0, F(0) = -\frac{1}{24}, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

である.

次に Γ に対する与えられた重さ k の保型形式, カスプ形式を決定する際に重要な役割を果たすものを示す. 次の命題はリーマンロッホの定理の特殊な場合である.

命題 3.25. [5, Koblitz, p.115, Proposition 8]
$f(z)$ を Γ に対する重さ k の保型関数とする. $\mathbb{H}$ 上の点 P に対し, 点 P での $f(z)$ の零点の位数もしくは極の位数の -1 倍を $v_P(f)$ で表す. また, $v_\infty(f)$ で q 展開における係数が最初に 0 でない項の次数を表すものとする. このとき,

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\omega(f) + \sum_{P\in\Gamma\backslash\mathbb{H}, P\neq i,\omega} v_P(f) = \frac{k}{12}.$$

この結果から次が成り立つ.

命題 3.26. [5, Koblitz, p.117, Proposition 9]
k を偶数とする.

(1) $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$, すなわち Γ に対する重さ 0 の保型形式は定数のみである.

(2) $k < 0$ または $k = 2$ のとき $M_k(\Gamma) = \{0\}$.

(3) $k = 4, 6, 8, 10, 14$ であれば $M_k(\Gamma)$ は 1 次元であり, E_k で生成される.

(4) $k < 12$ または $k = 14$ のとき $S_k(\Gamma) = \{0\}$ である. また, $S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta$ であり, $k > 14$ のとき $S_k(\Gamma) = \Delta M_{k-12}(\Gamma)$ である.

(5) $k > 2$ に対して, $M_k(\Gamma) = S_k(\Gamma) \oplus \mathbb{C}E_k$.

命題 3.27. [5, Koblitz, p.117, Proposition 10]
任意の Γ に対する重さ k の保型形式は次の形にかける.

$$f(z) = \sum_{4i+6j=k} c_{i,j} E_4(z)^i E_6(z)^j.$$

命題 3.26, 3.27 より次の系を得る.

系 3.28. $M_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ の次元は次のようになる.

$$\dim M_k(\Gamma) = \begin{cases} \sup\left\{0, \left[\frac{k}{12}\right]\right\} & (k \text{ は偶数で } k \equiv 2 \pmod{12}) \\ \sup\left\{0, 1 + \left[\frac{k}{12}\right]\right\} & (k \text{ は偶数で } k \not\equiv 2 \pmod{12}) \\ 0 & (k \text{ は奇数}) \end{cases},$$

$$\dim S_k(\Gamma) = \sup\{0, \dim M_k(\Gamma) - 1\}.$$

また, $\Gamma_0(4)$ における保型形式についてもリーマンロッホの定理の特殊な場合を考えることにより次の命題を得る.

命題 3.29. [5, Koblitz, p.146]

(1) k が負, または奇数なら $M_k(\Gamma_0(4)) = \{0\}$ である. $k = 0$ なら $M_k(\Gamma_0(4)) = \mathbb{C}$ である. k が正の偶数なら $M_k(\Gamma_0(4))$ は θ^4 と F に関する $\frac{k}{2}$ 次同次多項式で表される. また 6 以上の偶数に対して, $S_k(\Gamma_0(4))$ の元は $\theta^4 F(\theta^4 - 16F)$ で割ることができる θ^4 と F に関する $\frac{k}{2}$ 次同次多項式で表される.

(2) $M_k(\Gamma_0(4)), S_k(\Gamma_0(4))$ の次元は次のようになる.

$$\dim M_k(\Gamma_0(4)) = \begin{cases} \sup\left\{0, 1 + \frac{k}{2}\right\} & (k \text{ は偶数}) \\ 0 & (k \text{ は奇数}) \end{cases},$$
$$\dim S_k(\Gamma_0(4)) = \sup\{0, \dim M_k(\Gamma_0(4)) - 2\}.$$

次に指標付きの保型形式について述べる.

定義 3.30. χ を N を法とするディリクレ指標とする. このとき, $\Gamma_1(N)$ に対する重さ k の保型形式の部分空間 $M_k(N, \chi)$ を

$$M_k(N,\chi) = \left\{ f \in M_k(\Gamma_0(N)) \,\middle|\, \text{任意の} \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対し}, f|[\gamma]_k = \chi(d) f \right\}$$

で定義する. また $\Gamma_1(N)$ に対する重さ k のカスプ形式の部分空間 $S_k(N, \chi)$ を

$$S_k(N,\chi) = M_k(N,\chi) \cap S_k(\Gamma_1(N))$$

で定義する.

次の命題は指標付きの保型形式に関する基本的な命題である.

命題 3.31. [5, Koblitz, p.137, Proposition 28]

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_k(N,\chi).$$

ただし直和は N を法とするディリクレ指標全体を渡る.

ここでカスプ形式をメラン変換することを考える.

命題 3.32. [5, Koblitz, pp.139-141]
$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_k(\Gamma)$ を正規化した同時固有形式とし,

$$L_f(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty} c(n) n^{-s} (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

とする. f をメラン変換することによって $L_f(s)$ は正則に全平面に接続され, 関数等式

$$L_g(k - s) = (-1)^{\frac{k}{2}} L_f(s)$$

を満たす.

次にヘッケ作用素を定義するための準備をする.

定義 3.33. Γ_1, Γ_2 を群 G の部分群とする. $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ かつ $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ が成り立つとき, Γ_1 と Γ_2 は通約可能という.

命題 3.34. [5, Koblitz, p.165, Proposition 41]
Γ' を群 G の部分群, $\alpha \in G$ とする. このとき, Γ' と $\Gamma'' = \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ は通約可能である.

定義 3.35. Γ' を Γ の合同部分群, $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, $\Gamma'' = \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$, $[\Gamma' : \Gamma''] = d$ とする. また, Γ' の Γ'' に関する右剰余分解を $\Gamma' = \cup_{j=1}^{d} \Gamma''\gamma'_j$ とする. このとき, $f \in M_k(\Gamma')$ に対し, $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ を

$$f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k = \sum_{j=1}^{d} f(z)|[\alpha\gamma'_j]_k$$

で定義する.

命題 3.36. [5, Koblitz, p.166, Proposition 42]
$f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ は α, γ'_j のとり方によらない. また, $f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k \in M_k(\Gamma')$ である.

$\mathbb{Z}$ の $\{0\}$ でない加法群を S^+, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の部分群を $S^\times$ とする. このとき, n を正の整数として集合 $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$ を次のように定める.

$$\Delta^n(N, S^\times, S^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a \in S^\times, b \in S^+, N \mid c, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = n \right\}.$$

例えば, $\Delta^1(N, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ は $\Gamma_0(N)$ を表す. これを用いてヘッケ作用素を定義する.

定義 3.37. $\Gamma' = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$, $f(z) \in M_k(\Gamma')$ とする. このとき, ヘッケ作用素 $T_k(n)$ を

$$f(z)|T_k(n) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$$

で定義する. ただし和は $\Delta^1(N, S^\times, S^+)$ に含まれる Γ' の両側剰余類すべてを渡る.

ヘッケ作用素は $(m, n) = 1$ ならば $T_k(mn) = T_k(m)T_k(n)$ となり, $T_k(m)$ と $T_k(n)$ は可換である. 次の命題は $f|T_k(n)$ のフーリエ展開係数について f のフーリエ展開係数で表したものである.

命題 3.38. [5, Koblitz, p.161, Proposition 37]
χ を N を法とするディリクレ指標で, p を素数とする. $f, f|T_k(p) \in M_k(N, \chi)$ の q 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$, $f(z)|T_k(p) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とする. このとき,

$$b(n) = a\left(pn\right) + \chi(p)p^{k-1}a\left(\frac{n}{p}\right)$$

となる. ただし, $p \mid N$ のとき $\chi(p) = 0$ とし, $p \nmid n$ のとき $a\left(\frac{n}{p}\right) = 0$ とする.

$f \in M_k(\Gamma')$ がすべての素数 p に対し, $f|T_k(p) = \lambda_p f$ $(\lambda_p \in \mathbb{C})$ となるとき, f をヘッケ作用素 $T_k(p)$ の同時固有形式という. また, f の q 展開係数の 1 次の項が 1 のとき, f を正規化した同時固有形式と呼ぶ.

命題 3.39. k を 4 以上の偶数とする. アイゼンシュタイン級数 $E_k(z)$ は任意の素数 p に対するヘッケ作用素 $T_k(p)$ の同時固有形式となる.

証明. p を素数とし,

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n \geqq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n = \sum_{n \geqq 0} a(n)q^n,$$
$$E_k(z)|T_k(p) = \sum_{n \geqq 0} b(n)q^n$$

とする. このとき,

$$b(n) = \sigma_{k-1}(p)a(n) \tag{3.40}$$

となることを示す. σ_{k-1} は乗法性をもつことから, n と p が互いに素かどうかで場合分けする.

(i) $n = 0$ のときを考える. 命題 3.38 より,

$$\begin{aligned} b(0) &= a(0) + p^{k-1}a(0) = (1 + p^{k-1})a(0) \\ &= \sigma_{k-1}(p)a(0). \end{aligned}$$

よって (3.40) は成り立つ.

(ii) n と p が互いに素のときを考える. $\frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$ であるから, 命題 3.38 より,

$$\begin{aligned} b(n) &= a(pn) = -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(pn) \\ &= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(p)\sigma_{k-1}(n) \\ &= \sigma_{k-1}(p)a(n). \end{aligned}$$

よって (3.40) は成り立つ.

(iii) n と p が互いに素でないときを考える. $n = p^e n'$ (n' は p と互いに素) とする. 命題 3.38 より,

$$\begin{aligned} b(n) &= a(pn) + p^{k-1}a\left(\frac{n}{p}\right) = a(p^{e+1}n') + p^{k-1}a\left(p^{e-1}n\right) \\ &= -\frac{2k}{B_k}\left(\sigma_{k-1}(p^{e+1}n') + p^{k-1}\sigma_{k-1}(p^{e-1}n')\right) \\ &= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n')\left(\frac{1 - p^{(k-1)(e+2)}}{1 - p^{k-1}} + p^{k-1}\frac{1 - p^{(k-1)e}}{1 - p^{k-1}}\right) \\ &= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n')\frac{(1 + p^{k-1}) - p^{(k-1)(e+1)}(1 + p^{k-1})}{1 - p^{k-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n')\sigma_{k-1}(p^e)\sigma_{k-1}(p) \\
&= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(p^e n')\sigma_{k-1}(p) \\
&= -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n)\sigma_{k-1}(p) \\
&= \sigma_{k-1}(p)a(n).
\end{aligned}
$$

よって (3.40) は成り立つ.

以上より, $E_k(z)$ はヘッケ作用素 $T_k(p)$ に対して, 固有値 $\sigma_{k-1}(p)$ となる同時固有形式となることが示された. □

命題 3.41. [5, Koblitz, p.173, Proposition 51]

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $S_k(N,\chi)$ の基底で, N と互いに素なすべての $T_k(n)$ に対する同時固有形式からなるものが存在する.

Γ' が Γ の合同部分群であるとき, $\overline{\Gamma}'$ を

$$
\overline{\Gamma}' = \begin{cases} \Gamma'/\{\pm I\} & (-I \in \Gamma' \text{のとき.}) \\ \Gamma' & (-I \notin \Gamma' \text{のとき.}) \end{cases}
$$

とする.

定義 3.42. Γ' を Γ の合同部分群, $f, g \in M_k(\Gamma')$ は少なくとも一方がカスプ形式であるとする. このとき, ピーターソン内積を

$$
\langle f, g\rangle = \frac{1}{[\overline{\Gamma} : \overline{\Gamma}']}\int_{\Gamma'\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}
$$

で定義する.

この積分は少なくとも一方がカスプ形式であるから収束する.

この章の最後にニューフォーム, オールドフォームについて述べる. 大雑把に言えば, f がニューフォームとは, f がレベル N より低いレベルの保型形式でないことをいう.

定義 3.43. $S_k(N,\chi)$ の部分空間 $S_k^1(N,\chi)$ を

$$
\bigcup_M \bigcup_l \{f(lz) \mid f(z) \in S_k(M,\chi)\}
$$

で生成される部分空間とする. ただし, M は N の真の約数で χ の導手で割り切れるような自然数を渡り, l は $\frac{N}{M}$ の正の約数全体を渡る.

次に $S_k^0(N,\chi)$ を $S_k^1(N,\chi)$ のピーターソン内積に関する直交補空間と定義する. このとき $S_k^0(N,\chi)$ の元をニューフォームといい, $S_k^1(N,\chi)$ の元をオールドフォームという.

4　重さ半整数の保型形式

この章では重さ半整数の保型形式を定義する. この章では特に断らない限り k を奇数とし, λ を $\frac{k}{2}$ の整数部分, すなわち

$$\lambda = \frac{k-1}{2}$$

とする. 重さ半整数の保型因子を考えるため, まず $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の被覆を考える.

定義 4.1. $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の被覆 G を

$$G = \left\{ (\gamma, \phi(z)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q}), \phi \text{は } \mathbb{H} \text{ 上の正則関数} \\ t \in \mathbb{T} \text{ があり } \phi(z)^2 = t\dfrac{cz+d}{\sqrt{\det\gamma}} \text{ を満たす.} \end{array} \right\}$$

で定義する.

ここで G に次のような演算を定義する.

$$(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z)) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z))$$

命題 4.2. [5, Koblitz, p.179, Proposition 1]
G は上の演算で群をなす.

G の $\mathbb{H}$ 上の関数への作用を定義する.

定義 4.3. $\gamma' = (\gamma, \phi(z)) \in G$, $f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の関数とする. このとき

$$f(z)|[\gamma']_k = f(\gamma z)\phi(z)^{-k}$$

と定義する.

ここで定義 3.21 の $j(\gamma, z)$ を用いて, $\widetilde{\Gamma}'$ を定義する.

定義 4.4. Γ' を $\Gamma_0(4)$ の部分群とする. このとき

$$\widetilde{\Gamma}' = \{(\gamma, j(\gamma, z)) \mid \gamma \in \Gamma'\}$$

と定義する. また, $\widetilde{\gamma} = (\gamma, j(\gamma, z))$ と表すこととする.

次にカスプでの有理型, 正則, 零点について述べる. f は任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}'$ に対する $[\widetilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}}$ で不変であるとする. さらにカスプ $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対し $\alpha \in \Gamma$ を $s = \alpha\infty$ となるようにとり, $\alpha' = (\alpha, \phi(z)) \in G$ ととる. そこで $g = f|[\alpha']_{\frac{k}{2}}$ とする. このとき g は任意の $\pm\alpha'^{-1}\widetilde{\Gamma}'\alpha'$ の元で不変であり, ある正の整数 $h, t \in \mathbb{T}$ で,

$$\pm\alpha'^{-1}\widetilde{\Gamma}'\alpha' = \left\{ \pm\left(\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t\right)^j \;\middle|\; j \in \mathbb{Z} \right\}$$

となる. すると, $\left[\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\right]_{\frac{k}{2}}$ で不変であるから

$$g(z) = t^{-k} g(z+k)$$

となる. ここで $t^k = e^{2\pi i r}$, ただし $r \in [0,1)$ とする. よって $e^{-\frac{2\pi i r z}{h}} g(z)$ は $z \mapsto z+h$ で不変であるからフーリエ級数展開

$$g(z) = \sum_n a(n) e^{\frac{2\pi i z(n+r)}{h}}$$

をもつ. この展開で, 有限個の負の整数を除く負の整数 n で $a(n) = 0$ となるとき, f は s で有理型という. さらにすべての負の整数 n で $a(n) = 0$ となるとき, f は s で正則といい, $f(s) = \lim_{z \to i\infty} g(z)$ と定める. f がすべてのカスプで正則なとき, $r \neq 0$ または $r = 0$ かつ $a(0) = 0$ のとき f は s で零点を持つという.

Γ' のカスプ s と整数 k が与えられたとき, $r \neq 0$ ならば s を k 非正則といい, $r = 0$ すなわち $t^k = 1$ ならば s を k 正則という. よって, f がすべてのカスプで正則ならば k 非正則なカスプでは自動的に零点を持つ.

命題 4.5. $\Gamma_0(4)$ のカスプ $\infty, 0, \frac{1}{2}$ に対し, $\infty, 0$ は k 正則であり, $\frac{1}{2}$ は k 非正則である.

証明. カスプ ∞ については $\alpha = I, \widetilde{\alpha} = (I, 1)$ と取れば, $h = 1, t = 1$ と取れる. ゆえにカスプ ∞ は k 正則である.

カスプ 0 については, $\alpha = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \widetilde{\alpha} = (\alpha, \sqrt{z})$ と取る.

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\widetilde{\alpha}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & h\end{pmatrix}, t\sqrt{z+h}\right)\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, -i\sqrt{z}\right) = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -h & 1\end{pmatrix}, -it\sqrt{hz-1}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -h & 1\end{pmatrix}, t\sqrt{-hz+1}\right)\end{aligned}$$

となり, これが $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ の元になる必要がある. よって $h = 4, t = 1$ と取れる. ゆえにカスプ 0 は k 正則である.

カスプ $\dfrac{1}{2}$ については, $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \widetilde{\alpha} = (\alpha, \sqrt{2z+1})$ と取る.

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\widetilde{\alpha}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 2 & 2h+1\end{pmatrix}, t\sqrt{2z+2h+1}\right)\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \sqrt{-2z+1}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}1-2h & h\\ -4h & 1+2h\end{pmatrix}, t\sqrt{-4hz+2h+1}\right)\end{aligned}$$

となり, これが $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ の元になる必要がある. よって $h = 4, t = i$ と取れる. k は奇数だから, $t^k = 1$ にはならない. ゆえにカスプ 0 は k 非正則である. □

重さ半整数の保型形式を定義する.

定義 4.6. Γ' を $\Gamma_0(4)$ の有限指数部分群とする. $f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で, 任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}'$ に対して $[\widetilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}}$ で不変であるものとする. このとき f がすべてのカスプで有理型であるとき, f を $\widetilde{\Gamma}'$ に対する重さ $\frac{k}{2}$ の保型関数と呼ぶ. さらに, そのような f が $\mathbb{H}$ 上及びすべてのカスプで正則であるとき, f を $\widetilde{\Gamma}'$ に対する重さ $\frac{k}{2}$ の保型形式と呼び, $\widetilde{\Gamma}'$ に対する重さ $\frac{k}{2}$ の保型形式全体の集合を $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}')$ とかく. 保型形式 f がすべてのカスプで零点を持つとき, f を $\widetilde{\Gamma}'$ に対する重さ $\frac{k}{2}$ のカスプ形式と呼び, $\widetilde{\Gamma}'$ に対する重さ $\frac{k}{2}$ のカスプ形式全体の集合を $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}')$ とかく.

また重さが整数のときと同様に指標付きの保型形式を考えることができ, 命題 3.31 と同様に次の命題が示される.

命題 4.7. [5, Koblitz, p.183]

$$M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_{\frac{k}{2}}(N, \chi).$$

ただし直和は N を法とするディリクレ指標全体を渡る.

重さ半整数の保型形式の具体例を考える.

命題 4.8. [5, Koblitz, pp.147-153]
$\theta(z)$ は $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ に関する重さ $\frac{1}{2}$ の保型形式である. さらに各カスプでの値は

$$\theta(\infty) = 1, \theta(0) = \frac{1-i}{2}, \theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

である.

重さ整数のときと同様に次のことが成り立つ.

命題 4.9. [5, Koblitz, p.184, Proposition 4]

(1) $k < 0$ ならば $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \{0\}$ である.
$k > 0$ ならば, F を (3.24) とすると,

$$\left\{\theta^a F^b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{2} + 2b = \frac{k}{2}\right\}$$

は $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の基底である.

(2) $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)), S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の次元は次のようになる.

$$\dim M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \sup\left\{0, 1 + \left[\frac{k}{4}\right]\right\},$$
$$\dim S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \sup\left\{0, -1 + \left[\frac{k}{4}\right]\right\}.$$

次に重さ半整数のアイゼンシュタイン級数を定義する.

定義 4.10. k を 5 以上の奇数とする. $z \in \mathbb{H}$ に対し,

$$E_{\frac{k}{2}}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-k}$$

$$F_{\frac{k}{2}}(z) = E_{\frac{k}{2}}(z) \left| \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{2z} \right) \right]_{\frac{k}{2}} \right.$$

と定義する.

$k \geqq 5$ より, $E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}}$ は $\mathbb{H}$ の任意のコンパクト部分集合で絶対一様収束する.

命題 4.11. [5, Koblitz, p.186]
$E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}}$ は $\widetilde{\Gamma}_0(4)$ における重さ $\frac{k}{2}$ の保型形式である. さらに各カスプでの値は,

$$E_{\frac{k}{2}}(\infty) = 1, E_{\frac{k}{2}}(0) = E_{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, F_{\frac{k}{2}}(0) = (i\sqrt{2})^{-k}, F_{\frac{k}{2}}(\infty) = F_{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

である.

命題 4.11 から

$$M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \mathbb{C}E_{\frac{k}{2}} \oplus \mathbb{C}F_{\frac{k}{2}} \oplus S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$$

がわかる.
ここで

$$H_{\frac{k}{2}} = E_{\frac{k}{2}} + (1 + i^k)2^{-\frac{k}{2}} F_{\frac{k}{2}}$$

と定義する. $E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}}$ のフーリエ展開係数を計算することによって, 次の命題を得る.

命題 4.12. [5, Koblitz, p.193, Proposition 6]
D を基本判別式とする. $H_{\frac{k}{2}}$ の $|D|$ 番目の q 展開係数は $L(1-\lambda, \chi_D)/\zeta(1-2\lambda)$ である. また $(-1)^\lambda n \equiv 2, 3 \pmod 4$ となる n 番目の q 展開係数は 0 となる.

系 4.13. $H_{\frac{k}{2}}$ の q 展開係数の定数項は 1 であり, 1 次の項の係数は $\zeta(1-\lambda)/\zeta(1-2\lambda)$ である.

次にヘッケ作用素を定義する. 重さ整数のときと同様に, 両側剰余類を考える. ここで $4|N$, $f \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_1(N))$ を仮定する.

定義 4.14. n を N と互いに素な自然数, $\xi_n = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \sqrt[4]{n} \right)$ とする. このとき,

$$f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{\frac{k}{2}} = \sum_j f|[\xi_n\widetilde{\gamma}_j]_{\frac{k}{2}}$$

と定義する. ただし和は, $\widetilde{\Gamma}_1(N)$ の $\widetilde{\Gamma}'' = \xi_n^{-1}\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n \cap \widetilde{\Gamma}_1(N)$ に関する右剰余類の代表系を渡る.

命題 4.15. [5, Koblitz, pp.204-206, Proposition 12]
n を N と互いに素でかつ平方数でないものとする. このとき, $f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_n\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{\frac{k}{2}} = 0$ である.

命題 4.15 より, 重さ半整数のときは n が平方数の部分だけを考えればいいとわかる.

定義 4.16. $f \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_1(N)), \xi_{p^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \sqrt{p}\right)$ とする. f に作用するヘッケ作用素 $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ を

$$f|T_{\frac{k}{2}}(p^2) = p^{\frac{k}{2}-2} f|[\widetilde{\Gamma}_1(N)\xi_{p^2}\widetilde{\Gamma}_1(N)]_{\frac{k}{2}}$$

で定義する.

ここで,

$$\alpha_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \widetilde{\alpha_b} = (\alpha_b,\ \sqrt{p})$$

$$\beta_h = \begin{pmatrix} p & h \\ 0 & p \end{pmatrix}, \widetilde{\beta_h} = (\beta_h,\ \sqrt{p})$$

$$\tau = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{\tau} = (\tau,\ \sqrt{p})$$

として, $\widetilde{\Gamma}_1(4)\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}}\widetilde{\Gamma}_1(4)$ を

$$\bigcup_{b=0}^{p^2-1} \widetilde{\Gamma}_1(4)\widetilde{\alpha_b} \cup \bigcup_{h=1}^{p-1} \widetilde{\Gamma}_1(4)\widetilde{\beta_h} \cup \widetilde{\Gamma}_1(4)\widetilde{\tau} \tag{4.17}$$

と剰余分解することによって, $f|T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ の q 展開係数を f の q 展開係数で表す.

命題 4.18. [5, Koblitz, p.207, Proposition 13] , [10, Shimura, p.450, Theorem 1.7]
$4|N, \chi$ を N を法とするディリクレ指標で, p を素数とする. $f, f|T_{\frac{k}{2}}(p^2) \in M_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$ の q 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$, $f(z)|T_{\frac{k}{2}}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とする. このとき,

$$b(n) = a\left(p^2 n\right) + \chi(p)\left(\frac{(-1)^{\lambda} n}{p}\right) p^{\lambda-1} a(n) + \chi(p^2)p^{k-2} a\left(\frac{n}{p^2}\right)$$

となる. ただし, $p|N$ のとき $\chi(p) = 0$, $p^2 \nmid n$ のとき $a\left(\frac{n}{p^2}\right) = 0$ とする

$M_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$ は N と互いに素な $T_{\frac{k}{2}}(n^2)$ と $p|N$ となる $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ に対する同時固有形式からなる基底を持つ [5, Koblitz, p.210].
重さ整数のときと同様に内積を定義する.

定義 4.19. Γ' を $\Gamma_0(4)$ に含まれる合同部分群, $f, g \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma'})$ は少なくとも一方がカスプ形式であるとする. このとき, ピーターソン内積を

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{6[\overline{\Gamma}_0(4) : \overline{\Gamma}']}\int_{\Gamma'\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^{\frac{k}{2}}\frac{dxdy}{y^2}$$

で定義する.

重さ半整数の保型形式の重さ整数の保型形式への対応が志村対応である.

定理 4.20. [10, Shimura, p.458, Main Theorem], [8, Niwa, p.148, Theorem]

k を 3 以上の奇数, $2\lambda = k-1$, $4|N$, χ を N を法とするディリクレ指標, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in S_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$ をすべての素数 p に対する $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ の同時固有形式とする. t を平方因子を持たない正の整数とし, tN を法とするディリクレ指標 χ_t を $\chi_t(n) = \chi(n)\left(\frac{-1}{n}\right)^{\lambda}\left(\frac{t}{n}\right)$ で定義する.

$\mathbb{H}$ 上の関数 $F_t(z) = \sum_{n=1} A_t(n)q^n$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)n^{-s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi_t(m)m^{\lambda-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a\left(tn^2\right)n^{-s}\right)$$

で定義する. このとき, $\mathscr{S}_{t,k}$ を

$$\mathscr{S}_{t,k} : f(z) \mapsto F_t(z)$$

となる対応とする. $\mathscr{S}_{t,k}$ は $S_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$ から $M_{k-1}\left(\frac{N}{2},\chi^2\right)$ への対応となっている. さらに $k \geqq 5$ ならば $S_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$ から $S_{k-1}\left(\frac{N}{2},\chi^2\right)$ への対応となっている.

5　主定理の証明の準備

ここでも特に断らない限り, k を奇数, λ を $\frac{k}{2}$ の整数部分, $2\lambda = k-1$ とする.

補題 5.1. $\theta(z), H_{\frac{k}{2}}(z)$ は $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ の元である.

証明. $H_{\frac{k}{2}}$ については命題 4.12 で述べた. θ については, 命題 4.8 より $M_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ の元であった. $k=1$ なら $\lambda=0$ になることに注意すると, $n \equiv 2,3 \pmod 4$ となる n で q 展開係数が 0 であることを言えればよい. これは任意の整数の平方は 4 を法として 0 か 1 と合同であるから従う. よって $\theta \in M^+_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ である. □

定理 1.2 の証明のために 2 つの命題を準備する. 最初の命題は $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ が $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ の中での余次元が 1 であることを述べている.

命題 5.2. λ が偶数のとき, $M_\lambda(\Gamma) \oplus M_{\lambda-2}(\Gamma)$ と $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ は次の写像の下で同型である.

$$(g(z), h(z)) \mapsto g(4z)\theta(z) + h(4z)H_{\frac{5}{2}}(z).$$

また, λ が奇数のとき, $M_{\lambda-3}(\Gamma) \oplus M_{\lambda-5}(\Gamma)$ と $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ は次の写像の下で同型である.

$$(g(z), h(z)) \mapsto g(4z)H_{\frac{7}{2}}(z) + h(4z)H_{\frac{11}{2}}(z).$$

このことから, 次元に関して

$$\dim M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4)) = \dim M_{k-1}(\Gamma),$$
$$\dim S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4)) = \dim S_{k-1}(\Gamma)$$

が成立する.

また, $k \geqq 2$ に対して, $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4)) = \mathbb{C}H_{\frac{k}{2}}(z) \oplus S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ が成立する.

次に $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ に作用する作用素 U_4 を $p=2$ におけるヘッケ作用素 $T_{\frac{k}{2}}(4)$, W_4 を $\left[\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, (-2iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}$ を作用させる作用素として定義する. これらを明示的に書くと次のようになる.

$$f(z)|U_4 = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} f\left(\frac{z+\nu}{4}\right), \tag{5.3}$$

$$f(z)|W_4 = (-2iz)^{-\frac{k}{2}} f\left(-\frac{1}{4z}\right). \tag{5.4}$$

U_4 はヘッケ作用素であるため, $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4)), S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ をそれ自身にうつす. また, W_4 については [10, Shimura, p.448, Proposition 1.4] より, $M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4)), S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_0}(4))$ をそれ自身にうつす. この U_4W_4 に関して次のことが言える.

補題 5.5. [9, Niwa, p.183, Lemma 1]

$S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ はピーターソン内積におけるヒルベルト空間で, U_4W_4 は $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ 上のピーターソン内積に関するエルミート作用素である. また, $\alpha_1 = \left(\frac{2}{k}\right)2^{\lambda}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1$ とすると, $(U_4W_4 - \alpha_1)(U_4W_4 - \alpha_2) = 0$ を満たす. 固有値 α_ν に対する固有空間を $S^{(\nu)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ とすると, $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ は直交分解

$$S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \bigoplus_{\nu=1,2} S^{(\nu)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$$

を得る.

命題 5.6. $S^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ と $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ は一致する.

命題 5.2, 5.6 の証明. 4 つの補題に分けて証明する.

補題 5.7. 命題 *5.2* で定義された写像は単射である. また, $\dim M_{k-1}(\Gamma) \leqq \dim M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ である.

証明. $h(z) \neq 0$ で

$$g(4z)\theta(z) + h(4z)H_{\frac{5}{2}}(z) = 0\,(\lambda\text{が偶数}),$$
$$g(4z)H_{\frac{7}{2}}(z) + h(4z)H_{\frac{11}{2}}(z) = 0\,(\lambda\text{が奇数})$$

と仮定する.

λ が偶数のとき, $\theta \neq 0$ より両辺を $\theta(z)h(4z)$ で割ることにより,

$$\frac{H_{\frac{5}{2}}(z)}{\theta(z)} = -\frac{g(4z)}{h(4z)} \tag{5.8}$$

となる. $H_{\frac{5}{2}}/\theta$ については, 系 4.13 より

$$\begin{aligned}\frac{H_{\frac{5}{2}}(z)}{\theta(z)} &= \frac{1 - 10q + \cdots}{1 + 2q + \cdots} = (1 - 10q + \cdots)(1 + (-2q + \cdots) + (-2q + \cdots)^2 + \cdots) \\ &= 1 - 12q + \cdots\end{aligned}$$

となる. よって, (5.8) の右辺は $z \mapsto z + \frac{1}{4}$ の変換で不変だが, 左辺は不変でない. よって矛盾. ゆえに $h = 0$ であり, $\theta \neq 0$ より $g = 0$ となる. ゆえにこの対応は単射である.

λ が奇数のとき, $H_{\frac{7}{2}} \neq 0$ より両辺 $H_{\frac{7}{2}}(z)h(4z)$ で割ることにより,

$$\frac{H_{\frac{11}{2}}(z)}{H_{\frac{7}{2}}(z)} = -\frac{g(4z)}{h(4z)} \tag{5.9}$$

となる. $H_{\frac{11}{2}}/H_{\frac{7}{2}}$ について考える. 命題 4.9(1) より $H_{\frac{7}{2}}, H_{\frac{11}{2}}$ は θ と F の多項式で表される.

$H_{\frac{11}{2}} = a\theta^{11} + b\theta^7 F + c\theta^3 F^2\ (a, b, c \in \mathbb{C})$ とする. $H_{\frac{11}{2}}$ の各展開係数の定数項, q の係数, q^2 の係数は命題 4.12, 系 4.13 よりそれぞれ 1, 0, 0 である. $\theta^7 F, \theta^3 F^2$ の定数項はどちらも 0 だから $a = 1$ とわかる. θ^{11} の q の係数は, 11 平方和が 1 になる整数解の個数だから $2 \cdot \binom{11}{1} = 22$ となる. よって, $b = -22$. 同様に $\theta^{11}, \theta^7 F$ の q^2 の係数は, 220, 22 だから $c = -220 + 22 \cdot 14 = 88$ となる. $H_{\frac{7}{2}}$ も同様に計算して,

$$
\begin{aligned}
H_{\frac{7}{2}} &= \theta^3(\theta^4 - 14F) \\
H_{\frac{11}{2}} &= \theta^3(\theta^8 - 22\theta^4 F + 88F^2)
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{H_{\frac{11}{2}}(z)}{H_{\frac{7}{2}}(z)} = \frac{\theta^8 - 22\theta^4 F + 88F^2}{\theta^4 - 14F} &= \frac{1 - 6q + 24q^2 - 168q^3 + \cdots}{1 - 6q + 24q^2 - 24q^3 + \cdots} \\
&= (1 - 6q + 24q^2 - 168q^3 + \cdots) \\
&\qquad (1 + (6q - 24q^2 - 24q^3 + \cdots) + (6q - 24q^2 - 24q^3 + \cdots)^2 \\
&\qquad\qquad + (6q - 24q^2 - 24q^3 + \cdots)^3 + \cdots) \\
&= 1 - 144q^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

となる. よって, (5.9) の右辺は $z \mapsto z + \frac{1}{4}$ の変換で不変だが, 左辺は不変でない. よって矛盾. ゆえに $h = 0$ であり, $H_{\frac{7}{2}} \neq 0$ より $g = 0$ となる. ゆえにこの対応は単射である.

よって

$$
\dim M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \geqq \begin{cases} \dim\left(M_\lambda(\Gamma) \oplus M_{\lambda-2}(\Gamma)\right) & (\lambda \text{が偶数}) \\ \dim\left(M_{\lambda-3}(\Gamma) \oplus M_{\lambda-5}(\Gamma)\right) & (\lambda \text{が奇数}) \end{cases}
$$

となる. ここで, 系 3.28 を用いて,

$$
\dim\left(M_\lambda(\Gamma) \oplus M_{\lambda-2}(\Gamma)\right), \dim\left(M_{\lambda-3}(\Gamma) \oplus M_{\lambda-5}(\Gamma)\right), \dim M_{k-1}(\Gamma)
$$

を計算し,

$$
\dim M_{k-1}(\Gamma) = \begin{cases} \dim\left(M_\lambda(\Gamma) \oplus M_{\lambda-2}(\Gamma)\right) & (\lambda \text{が偶数}) \\ \dim\left(M_{\lambda-3}(\Gamma) \oplus M_{\lambda-5}(\Gamma)\right) & (\lambda \text{が奇数}) \end{cases}
$$

を示す. $\lambda \leqq 1$ のときは明らかなので, $\lambda \geqq 2$ を仮定する.

(i) λ が偶数, すなわち $\lambda \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10 \pmod{12}$ のときを考える.

$\lambda = 12l + 2m\,(0 \leqq m \leqq 5)$ とおく. このとき, $k - 1 = 24l + 4m$ である. まず

$$
\dim M_{k-1}(\Gamma) = 1 + \left[\frac{24l + 4m}{12}\right] = 1 + \left[2l + \frac{m}{3}\right] = \begin{cases} 2l + 1 & (m = 0, 1, 2) \\ 2l + 2 & (m = 3, 4, 5) \end{cases}
$$

となる. 次に

$$
\dim M_\lambda(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{12l+2}{12}\right] = l & (m = 1) \\ 1 + \left[\frac{12l+2m}{12}\right] = l + 1 & (m \neq 1) \end{cases}
$$

$$\dim M_{\lambda-2}(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{12l+2}{12}\right] = l & (m=2) \\ 1 + \left[\frac{12l+2m-2}{12}\right] = l+1+\left[\frac{2m-2}{12}\right] & (m \neq 2) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} l & (m=0,2) \\ l+1 & (m=1,3,4,5) \end{cases}$$

なので,

$$\dim\left(M_\lambda(\Gamma) \oplus M_{\lambda-2}(\Gamma)\right) = \begin{cases} 2l+1 & (m=0,1,2) \\ 2l+2 & (m=3,4,5) \end{cases}$$
$$= \dim M_{k-1}(\Gamma)$$

となり確かに等しい.

(ii) λ が奇数, すなわち $\lambda \equiv 1,3,5,7,9,11 \pmod{12}$ のときを考える.

$\lambda = 12l + 2m + 1\,(0 \leqq m \leqq 5)$ とおく. このとき $k-1 = 24l+4m+2$ である. まず

$$\dim M_{k-1}(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{24l+4m+2}{12}\right] = 2l + \left[\frac{4m+2}{12}\right] & (m=0,3) \\ 1 + \left[\frac{24l+4m+2}{12}\right] = 2l+1+\left[\frac{4m+2}{12}\right] & (m \neq 0,3) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2l & (m=0) \\ 2l+1 & (m=1,2,3) \\ 2l+2 & (m=4,5) \end{cases}$$

となる. 次に,

$$\dim M_{\lambda-3}(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{12l+2}{12}\right] = l & (m=2) \\ 1 + \left[\frac{12l+2m-4}{12}\right] = l+1+\left[\frac{2m-4}{12}\right] & (m \neq 2) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} l & (m=0,2) \\ l+1 & (m=1,3,4,5) \end{cases}$$
$$\dim M_{\lambda-5}(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{12l+2}{12}\right] = l & (m=3) \\ 1 + \left[\frac{12l+2m-2}{12}\right] = l+1+\left[\frac{2m-2}{12}\right] & (m \neq 3) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} l & (m=0,1,3) \\ l+1 & (m=2,4,5) \end{cases}$$

なので,

$$\dim\left(M_{\lambda-3}(\Gamma) \oplus M_{\lambda-5}(\Gamma)\right) = \begin{cases} 2l & (m=0) \\ 2l+1 & (m=1,2,3) \\ 2l+2 & (m=4,5) \end{cases}$$

$$= \dim M_{k-1}(\Gamma)$$

となり確かに等しい. □

補題 5.10. $M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ は $M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \left\{ f \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \,\middle|\, f|U_4W_4 = \alpha_1 f \right\}$ に含まれる.

証明. $f \in M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ とする. U_4 の定義から,

$$\begin{aligned} f|U_4(z) &= \frac{1}{4}f\left(\frac{z}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{z+1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{z+2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{z+3}{4}\right) \\ &= 2^{-2}\left\{f\left(\frac{z+1}{4}\right) + f\left(\frac{z+3}{4}\right)\right\} + 2^{-2}\left\{f\left(\frac{z}{4}\right) + f\left(\frac{z+2}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 2^{-2}\left\{f\left(\frac{z+1}{4}\right) + f\left(\frac{z+3}{4}\right)\right\} \\ f_2(z) &= 2^{-2}\left\{f\left(\frac{z}{4}\right) + f\left(\frac{z+2}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

とする. まず f_1 について考える. 定義より,

$$2^2 f_1(z) = f\left(\frac{z+1}{4}\right) + f\left(\frac{z+3}{4}\right) = 2^{\frac{k}{2}} f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}, \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. + 2^{\frac{k}{2}} f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}, \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. .$$

ここで f の q 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ として, f_1 に W_4 を作用させる.
$\begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\-4 & 3\end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ であるから,

$$\begin{aligned} 2^{2-\frac{k}{2}} f_1|W_4 &= 2^{2-\frac{k}{2}} f_1\left|\left[\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\4 & 0\end{pmatrix}, (-2iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \\ &= f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & -1\\16 & 0\end{pmatrix}, 2(-iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. + f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}12 & -1\\16 & 0\end{pmatrix}, 2(-iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \\ &= f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{pmatrix}, (-4z+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \left|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & -1\\16 & 0\end{pmatrix}, 2(-iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \\ &\qquad + f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\-4 & 3\end{pmatrix}, i(-4z+3)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \left|\left[\left(\begin{pmatrix}12 & -1\\16 & 0\end{pmatrix}, 2(-iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \\ &= f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & -1\\0 & 4\end{pmatrix}, e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. + f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}, e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{\pi ik}{4}} f\left(z-\frac{1}{4}\right) + e^{-\frac{\pi ik}{4}} f\left(z+\frac{1}{4}\right)$$
$$= e^{\frac{\pi ik}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n e^{-\frac{2\pi i}{4}n} + e^{-\frac{\pi ik}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n e^{\frac{2\pi i}{4}n}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) a(n)q^n.$$

$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right)$ を $k \bmod 8$ で考える. そこで, q 展開の係数 $a(n)$ が $(-1)^{\lambda} n \equiv 2, 3 \pmod 4$ のとき $a(n) = 0$ になっていることに注意する.

(i) $k \equiv 1 \pmod 8$ のときを考える.

このとき $e^{\frac{\pi ik}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ となる. また, λ は偶数だから $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ を考えればよい. すなわち

$$e^{-\frac{2\pi in}{4}} = i^{-n} = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \\ -i & (n \equiv 1 \pmod 4) \end{cases}$$

となる. よって

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left((1+i)i^{-n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(ii) $k \equiv 3 \pmod 8$ のときを考える.

このとき $e^{\frac{\pi ik}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ となる. また, λ は奇数だから $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ を考えればよい. すなわち

$$i^{-n} = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \\ i & (n \equiv 1 \pmod 4) \end{cases}$$

となる. よって

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left((-1+i)i^{-n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) $k \equiv 5 \pmod 8$ のときを考える.

このとき $e^{\frac{\pi ik}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ となる. また, λ は偶数だから $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ を考えればよい. よって

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left(-(1+i)i^{-n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iv) $k \equiv 7 \pmod 8$ のときを考える.

このとき $e^{\frac{\pi ik}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ となる. また, λ は奇数だから $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ を考えればよい. よって

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left((1-i)i^{-n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これらをまとめると,

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & (k \equiv 1, 7 \pmod 8) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & (k \equiv 3, 5 \pmod 8) \end{cases}$$

となる. また,

$$\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{k^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & (k \equiv 1, 7 \pmod 8) \\ -1 & (k \equiv 3, 5 \pmod 8) \end{cases}$$

となることから

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\pi i(k-2n)}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{k}\right)$$

となることがわかる. よって

$$f_1|W_4 = 2^{\lambda-1}\left(\frac{2}{k}\right)f.$$

次に f_2 について考える. $n \equiv 2 \pmod 4$ のとき, $a(n) = 0$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} 2^2 f_2(z) &= f\left(\frac{z}{4}\right) + f\left(\frac{z+2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{\frac{n}{4}} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{\frac{n}{4}}e^{\pi in} = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\,a(n)q^{\frac{n}{4}} \\ &= 2\sum_{4|n} a(n)q^{\frac{n}{4}}, \\ 2^2 f_1(z) &= f\left(\frac{z+1}{4}\right) + f\left(\frac{z+3}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{\frac{n}{4}}e^{\frac{\pi in}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{\frac{n}{4}}e^{\frac{3\pi in}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(i^n + (-i)^n)\,a(n)q^{\frac{n}{4}} \\ &= 2\sum_{4|n} a(n)q^{\frac{n}{4}}. \end{aligned}$$

よって,

$$f|U_4 = \sum_{4|n} a(n)q^{\frac{n}{4}} = 2f_2.$$

ここに W_4 を作用させて,

$$f_2|W_4 = \frac{1}{2}f|U_4W_4.$$

以上より

$$f|U_4W_4 = f_1|W_4 + f_2|W_4 = 2^{\lambda-1}\left(\frac{2}{k}\right)f + \frac{1}{2}f|U_4W_4$$

となる.$f|U_4W_4 = 2^{\lambda}\left(\frac{2}{k}\right)f = \alpha_1 f$ となることから $f \in M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ となる. □

補題 5.11.

$$M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \mathbb{C}H_{\frac{k}{2}}(z) \oplus S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$$

証明. 補題 5.10 より $H_{\frac{k}{2}} \in M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ であったから, $H_{\frac{k}{2}} \in M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ である.

f を $M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から任意にとる. $H_{\frac{k}{2}}$ はカスプ ∞ で 0 でないから $\mu \in \mathbb{C}$ があり,

$$g = f - \mu H_{\frac{k}{2}}$$

がカスプ ∞ で 0 になる. 当然 $g \in M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ であるから, $g|U_4W_4 = \alpha_1 g$ である. この g に W_4 を作用させると,

$$g|W_4 = \frac{1}{\alpha_1} g|U_4W_4|W_4 = \frac{1}{\alpha_1} g|U_4|W_4^2 = \frac{1}{\alpha_1} g|U_4.$$

$g|U_4$ は (5.3) で展開した各項がカスプ ∞ で 0 になるから, $g|W_4$ はカスプ ∞ で 0 になる. よって, g はカスプ 0 で 0 になる. また, カスプ $\frac{1}{2}$ は k 非正則なカスプだから, カスプ $\frac{1}{2}$ での値も 0 になる. よって, $g \in S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ となる. □

補題 5.12.

$$\dim M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim M_{k-1}(\Gamma), \dim S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim S_{k-1}(\Gamma.)$$

証明. $k < 0$ のとき, $M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \{0\}, M_{k-1}(\Gamma) = \{0\}$ となるから成立する.

$k = 1$ のとき,

$$1 = \dim M_0(\Gamma) \leqq \dim M^{+}_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim M^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim M_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = 1$$

となり確かに主張は正しい. ここで 1 つ目の不等号は補題 5.7 を用い, 2 つ目の不等号は補題 5.10 を用いている. また, $S^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \{0\}, S_0(\Gamma) = \{0\}$ となり後者も成立する.

$k = 3$ のとき, $M_2(\Gamma) = \{0\}$ より, $M^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = 0$ を示す.

$M_{\frac{3}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \left\{a\theta^3 \,\middle|\, a \in \mathbb{C}\right\}$ より, θ^3 に U_4W_4 を作用させる. ここで, $\theta(z) \in M^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ より, $\theta|U_4W_4 = \theta$ である. $\theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$ より,

$$\begin{aligned}\theta(z)|U_4 &= 1 + 2\sum_{2|n}^{\infty} q^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\end{aligned}$$

となる. よって, θ は U_4 で不変である. よって, $\theta(z)|W_4 = (-2iz)^{-\frac{1}{2}}\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) = \theta(z)$ となる.

次に θ^3 に U_4 を作用させることを考える. ここで, $K_k = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = k\}$ とおく. θ^3 の q 展開の n 番目の係数は, 3 つの平方和が n になる整数解の個数だから, $\#K_n$ となる. $(a, b, c) \in K_k$ ならば, $(2a, 2b, 2c)$ は K_{4k} の元になる. よって $\#K_k \leqq \#K_{4k}$ である.

次に, (a, b, c) を $\#K_{4k}$ からとる. $a^2 + b^2 + c^2$ が 4 の倍数になるため平方数が 4 を法として 0 か 1 と合同になることを考えると, a, b, c はすべて偶数である. そこで $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ を考

えると, これは K_k の元になる. よって $\#K_{4k} \leqq \#K_k$ である. 以上のことから $\#K_{4k} = \#K_k$ となる. よって,

$$\theta^3(z)|U_4 = 1 + \sum_{n \geqq 0} \#K_{4n} q^n = 1 + \sum_{n \geqq 0} \#K_n q^n = \theta^3(z)$$

となり, θ^3 も U_4 で不変であることがわかる. よって,

$$\begin{aligned} \theta^3(z)|U_4 W_4 = \theta^3(z)|W_4 &= (-2iz)^{-\frac{3}{2}} \theta^3 \left(-\frac{1}{4z}\right) \\ &= \left\{(-2iz)^{-\frac{1}{2}} \theta \left(-\frac{1}{4z}\right)\right\}^3 \\ &= \theta^3(z) \end{aligned}$$

となり, $\theta^3 \notin M^{(1)}_{\frac{3}{2}}(4)$ である. よって, $M^{(1)}_{\frac{3}{2}}(4) = \{0\}$ となり, $k = 3$ のときも主張は正しい.

$k \geqq 5$ のとき,

$$\begin{aligned} \dim M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) &= 1 + \dim S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \\ \dim M_{k-1}(\Gamma) &= 1 + \dim S_{k-1}(\Gamma) \end{aligned}$$

より, $\dim S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim S_{k-1}(\Gamma)$ を示せばよい.

p を奇素数とする. U_4 は $p = 2$ のときのヘッケ作用素 $T_{\frac{k}{2}}(4)$ であるから, $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と U_4 は可換である. $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と W_4 の可換性を確認する. 命題 4.14 では $\widetilde{\Gamma}_0(4)\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}}\widetilde{\Gamma}_0(4)$ を (4.17) と剰余分解して, ヘッケ作用素 $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ を

$$f|T_{\frac{k}{2}}(p^2) = p^{\frac{k}{2}-2} \left\{ \sum_{b=0}^{p^2-1} f|[\widetilde{\alpha}_b]_{\frac{k}{2}} + \sum_{h=1}^{p-1} f|[\widetilde{\beta}_h]_{\frac{k}{2}} + f|[\widetilde{\tau}]_{\frac{k}{2}} \right\}$$

で表した. ここで $f|W_4 T_{\frac{k}{2}}(p^2) W_4^{-1} = f|T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ を示す.

$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{\beta} = \left(\beta, (-2iz)^{\frac{1}{2}}\right), \gamma_i \in \Gamma_0(4), \widetilde{\gamma_i} = (\gamma_i, j(\gamma_i, z))\,(i = 1, 2)$ とする.

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}\,\widetilde{\alpha_0}\,\widetilde{\beta}^{-1} &= (\widetilde{\beta\alpha_0\beta^{-1}}), \\ \widetilde{\beta}\,\widetilde{\gamma_1}\,\widetilde{\beta}^{-1} &= (\widetilde{\beta\gamma_1\beta^{-1}}), \\ \widetilde{\beta}\,(\widetilde{\gamma_1\alpha_0\gamma_2})\,\widetilde{\beta}^{-1} &= (\beta\gamma_1\widetilde{\alpha_0\gamma_2}\beta^{-1}) \end{aligned}$$

より, 行列の部分がどう変わるかを見ればよい.

b と p が互いに素のとき, $p^2 s + 4bt = 1$ となる s, t がとれ,

$$\beta\alpha_b\beta^{-1} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ -4b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & t \\ -4b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

となる. ここで b が $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$ 動くとき, $-t$ も同じ範囲を動く.

b と p が互いに素でない, すなわち $b = kp(1 \leqq k \leqq p-1)$ のとき, $ps' + 4kt' = 1$ となる s', t' がとれ,

$$\beta\alpha_{kp}\beta^{-1} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ -4kp & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & t' \\ -4k & s' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -t' \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

となる. ここで b が $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \setminus \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times \cup \{0\}$ となる部分を動くとき, $-t'$ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を動く.

α_0 については,

$$\beta\alpha_0\beta^{-1} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tau$$

となる.

次に β_h について, $ps'' + 4ht'' = 1$ となる s'', t'' がとれ,

$$\beta\beta_h\beta^{-1} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ -4h & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & t'' \\ -4h & s'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -pt'' \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

となる. ここで h が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ となる部分を動くとき, $-pt''$ は $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \setminus \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times \cup \{0\}$ を動く.

最後に τ については,

$$\beta\tau\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \alpha_0$$

となる.

以上より,

$$\begin{aligned} f|W_4T_{\frac{k}{2}}(p^2)W_4^{-1} &= p^{\frac{k}{2}-2}\left\{\sum_{b=0}^{p^2-1} f|[\widetilde{\beta\alpha_b\beta^{-1}}]_{\frac{k}{2}} + \sum_{h=1}^{p-1} f|[\widetilde{\beta\beta_h\beta^{-1}}]_{\frac{k}{2}} + f|[\widetilde{\beta\tau\beta^{-1}}]_{\frac{k}{2}}\right\} \\ &= p^{\frac{k}{2}-2}\left\{f|[\widetilde{\tau}]_{\frac{k}{2}} + \sum_{(t,p)=1} f|[\widetilde{\alpha}_t]_{\frac{k}{2}} + \sum_{t'=1}^{p-1} f|[\widetilde{\beta}_{t'}]_{\frac{k}{2}} + \sum_{t''=0}^{p-1} f|[\widetilde{\alpha}_{t''}]_{\frac{k}{2}} + f|[\widetilde{\alpha}_0]_{\frac{k}{2}}\right\} \\ &= f|T_{\frac{k}{2}}(p^2). \end{aligned}$$

よって, $f|W_4T_{\frac{k}{2}}(p^2) = f|T_{\frac{k}{2}}(p^2)W_4$ となり, W_4 と $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ は可換である.

よって, $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と U_4, W_4 は可換であるから, $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ は $S_{\frac{k}{2}}^{(1)}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ をそれ自身に保ち, $S_{\frac{k}{2}}^{(1)}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ はすべての $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ の同時固有形式からなる直交基底 $\{f_i\}$ を持つ.

ここで, $S_{k-1}(\Gamma_0(2))$ における作用 U_2 を,

$$\sum_{n\geqq 1} c(n)q^n|U_2 = \sum_{n\geqq 1} c(2n)q^n$$

と定義する. ここで, [9, Niwa, p.185, Theorem] において次のような同型写像の存在が示されている.

命題 5.13. [9, Niwa, p.185, Theorem]

$\psi : S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \to S_{k-1}(\Gamma_0(2))$ で, $U_4\psi = \psi U_2$ かつすべての奇素数 p に対して, $T_{\frac{k}{2}}(p^2)\psi = \psi T_{k-1}(p)$ となる同型写像が存在する.

ここで, $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の直交基底 $\{f_i\}$ に ψ を適用する. $f_i|\psi$ がニューフォームだと仮定すると, [1, Atkin Lehner, pp.151-153, Theorem 5] より U_2 で固有値 $\pm 2^{\lambda-1}$ を持つ. よって

$$f_i|U_4\psi = f_i|\psi U_2 = \pm 2^{\lambda-1} f_i|\psi$$

より, $f_i|U_4 = \pm 2^{\lambda-1} f_i$ となる. また, f_i は $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の元であるから,

$$\alpha_1 f_i = \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda} f_i = f_i|U_4 W_4 = \pm 2^{\lambda-1} f_i|W_4$$

となる. ここで W_4^2 は恒等変換だから, これに W_4 を作用させることによって,

$$\alpha_1 f_i|W_4 = \pm 2^{\lambda-1} f_i$$

となる. この 2 式で f_i について整理すれば, $4f_i = f_i$ となり $f_i = 0$ となり矛盾する. よって, $f_i|\psi$ はオールドフォームである. $f_i|\psi$ も同時固有形式であり $S_{k-1}(\Gamma)$ にヘッケ代数が重複度 1 で作用することから, $f_i|\psi \in \mathbb{C}F_i(z) \oplus \mathbb{C}F_i(2z)$ となる. ただし, F_i は $S_{k-1}(\Gamma)$ の元で, すべての素数の $T_{k-1}(p)$ に対する正規化した同時固有形式である.

そこで $\psi^+ : S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \to S_{k-1}(\Gamma)$ を $f_i \mapsto F_i$ となるように定義する. この ψ^+ は単射であることが次の補題から従う.

補題 5.14. f, f' を 0 でない $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の元ですべての奇素数 p に対して $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ に関する同じ固有値を持つ固有形式とする. このとき, $\mathbb{C}f = \mathbb{C}f'$ である.

証明. $\mathbb{C}f \neq \mathbb{C}f'$ と仮定する. $h = f|\psi, h' = f'|\psi$ とおく. $\mathbb{C}f \neq \mathbb{C}f'$ の仮定のもとで, $\mathbb{C}h \neq \mathbb{C}h'$ である. また f, f' の線形結合を考えることで, $h(z) = F(z), h'(z) = F(2z)$ とできる. ただし, F は $S_{k-1}(\Gamma)$ のすべてのヘッケ作用素による同時固有形式である. よって, $h = h'|U_2$ すなわち $f = f'|U_4$ となる.

f, f' は $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の元であるから,

$$\alpha_1 f' = f'|U_4 W_4 = f|W_4 = \frac{1}{\alpha_1} f|U_4 = \frac{1}{\alpha_1} f'|U_4^2$$

となる. ここの ψ を作用させることで,

$$\alpha_1^2 h' = 2^{2\lambda} h' = h'|U_2^2.$$

よって, $2^{2\lambda}F(2z) = F(z)|U_2$ ここで F の $T_{k-1}(2)$ に対する固有値を λ とする. $F(z)$ の q 展開を $\sum_{n \geqq 1} a(n)q^n$ とすると,

$$\lambda F(z) = F(z)|T_{k-1}(2) = \sum_{n \geqq 1} \left(a(2n) + 2^{2\lambda-1} a\left(\frac{n}{2}\right) \right) q^n = F(z)|U_2 + 2^{2\lambda-1}F(2z)$$

$$= \left\{2^{2\lambda} + 2^{2\lambda-1}\right\} F(2z)$$

となる. よって, $F = 0$. これは矛盾. □

この補題は $S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ にヘッケ代数が重複度 1 で作用することを示している.

この補題から $\dim S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim S_{k-1}(\Gamma)$ が成立する. □

補題 5.7 から補題 5.12 を用いて命題 5.2, 5.6 を示す. 補題 5.7, 補題 5.10 より

$$\dim M_{k-1}(\Gamma) \leqq \dim M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$$

が成立する. 補題 5.12 より $\dim M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \leqq \dim M_{k-1}(\Gamma)$ より,

$$\dim M_{k-1}(\Gamma) = \dim M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \dim M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$$

となる. 特に, $M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = M^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ である. またカスプも同様に, $S^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = S^{(1)}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ である.

命題 5.2 の写像は補題 5.7 より単射であり, 次元が等しいことから全射性もわかる. よって同型写像となっている.

以上より命題 5.2, 5.6 が示された.

□

p を素数とする. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ のとき, コーネンプラススペースに作用するヘッケ作用素 $T^{+}_{\frac{k}{2}}(p^2)$ を

$$f(z)|T^{+}_{\frac{k}{2}}(p^2) = \sum_{\substack{n \geqq 0 \\ (-1)^{\lambda}n \equiv 0,1 \pmod 4}} \left(a(p^2 n) + \left(\frac{(-1)^{\lambda}n}{p}\right) p^{\lambda-1} a(n) + p^{k-2} a\left(\frac{n}{p^2}\right)\right) q^n$$

で定義する. これは p が奇素数のときは, 重さ半整数の保型形式のヘッケ作用素を $M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ へ制限したものであり差異はない. ただし, $p = 2$ のとき $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ では和の中の第 2, 3 項が消えるように定義していたのに対し, $T^{+}_{\frac{k}{2}}(4)$ では消えないようになっている.

6　定理の証明

6.1　定理 1.2 の証明

定理 1.2 の証明. まず (i) を示す. $f \in M^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ とする. 奇素数 p に対して, $T^{+}_{\frac{k}{2}}(p^2)$ は $T_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と一致するため, $S^{+}_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ 上でエルミート作用素となる. ここで,

$$f|T^{+}_{\frac{k}{2}}(4) = f|W_4|(U_4 W_4 - \alpha_2) \tag{6.1}$$

であることを示す. p が奇素数のとき $T^{+}_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と U_4, W_4 は各々可換であったため, (6.1) が成立すればすべての異なる素数 p, q で $T^{+}_{\frac{k}{2}}(p^2)$ と $T^{+}_{\frac{k}{2}}(q^2)$ は可換である.

まず (6.1) の右辺を次のように 5 つの項に分解して計算する.

$$\begin{aligned} f|W_4|(U_4W_4-\alpha_2) &= \sum_{\nu=0}^{3} 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left| W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4 - \alpha_2 f|W_4\right. \\ &= \sum_{\nu=0}^{4} s_\nu(f). \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} s_\nu(f) &= 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left| W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right. \qquad (0 \leqq \nu \leqq 3), \\ s_4(f) &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda-1} f|W_4 \end{aligned}$$

である. ここで, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ として $s_\nu(f)\,(1 \leqq \nu \leqq 4)$ を計算する. まず $s_4(f)$ に関しては,

$$\begin{aligned} s_4(f) &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda-1}\frac{1}{\alpha_1} f|U_4 = \frac{1}{2} f|U_4 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a(4n)q^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{(-1)^\lambda n \equiv 0,1 \pmod 4} a(4n)q^n + \frac{1}{2}\sum_{(-1)^\lambda n \equiv 2,3 \pmod 4} a(4n)q^n \end{aligned}$$

となる.

$s_1(f) + s_3(f)$ に関しては, 命題 5.6 の証明の (ii) と同じ計算をして,

$$\begin{aligned} s_1(f) + s_3(f) &= 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left| W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right. + 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left| W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right. \\ &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-2} i^{\lambda}(1+i) f\left(z-\frac{1}{4}\right)|U_4 + \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-2} i^{-\lambda}(1-i) f\left(z+\frac{1}{4}\right)|U_4 \\ &= \left(\frac{2}{k}\right)\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathrm{Re}(i^{\lambda}(1+i)i^{-n})\right\} a(4n)q^n \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\mathrm{Re}(i^{\lambda}(1+i)i^{-n}) = \begin{cases} \left(\frac{2}{k}\right) & ((-1)^\lambda n \equiv 0,1 \pmod 4) \\ -\left(\frac{2}{k}\right) & ((-1)^\lambda n \equiv 2,3 \pmod 4) \end{cases}$$

より,

$$s_1(f) + s_3(f) = \frac{1}{2}\sum_{(-1)^\lambda n \equiv 0,1 \pmod 4} a(4n)q^n - \frac{1}{2}\sum_{(-1)^\lambda n \equiv 2,3 \pmod 4} a(4n)q^n.$$

よって,

$$s_1(f)+s_3(f)+s_4(f)=\sum_{(-1)^\lambda n\equiv 0,1 \pmod 4} a(4n)q^n.$$

また $s_0(f)$ に関しては,

$$\begin{aligned}
s_0(f) &= 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left|W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right.\\
&= 2^{\frac{k}{2}-2}(-2iz)^{-\frac{k}{2}}\ f\left(-\frac{1}{4z}\right)\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right.\\
&= 2^{-2}\left(-\frac{iz}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}\ f\left(-\frac{1}{z}\right)\Big|W_4\\
&= 2^{-2}\left(-\frac{1}{8iz}\right)^{-\frac{k}{2}}(-2iz)^{-\frac{k}{2}} f(4z)\\
&= 2^{2\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{4n}\\
&= 2^{k-2}\sum_{4|n} a\left(\frac{n}{4}\right)q^n
\end{aligned}$$

となる.

最後に $s_2(f)=2^{k-1}\sum_{n\geqq 0}\left(\frac{(-1)^\lambda n}{2}\right)a(n)q^n$ を示す. まず,

$$\begin{aligned}
s_2(f) &= 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left|W_4\left[\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right.\\
&= 2^{\frac{k}{2}-2}\frac{1}{\alpha_1}\ f\left|U_4\left[\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right.\\
&= \left(\frac{2}{k}\right)2^{\frac{1}{2}-2}\sum_{\nu \bmod 4} 2^{\frac{k}{2}-2}\ f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1&\nu\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\left[\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix},\ \sqrt{2}\right)\right]_{\frac{k}{2}} W_4\right.\\
&= \left(\frac{2}{k}\right)2^{\lambda-3}\sum_{\nu \bmod 4} f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}1&4\nu+2\\0&16\end{pmatrix},2\right)\right]_{\frac{k}{2}}\left[\left(\begin{pmatrix}0&-1\\4&0\end{pmatrix},(-2iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right.\\
&= \left(\frac{2}{k}\right)2^{\lambda-3}\sum_{\nu \bmod 4} f\left|\left[\left(\begin{pmatrix}16\nu+8&-1\\64&0\end{pmatrix},2(-2iz)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right.
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\left(\begin{pmatrix}16\nu+8&-1\\64&0\end{pmatrix},2(-2iz)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2\nu+1 & -\frac{1+a(2\nu+1)}{8} \\ 8 & -a \end{pmatrix}, (8z-a)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{-a}\right) \varepsilon_{-a}^{-1} \right) \left(\begin{pmatrix} 8 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \varepsilon_{-a} \left(\frac{8}{-a}\right) (-i)^{\frac{1}{2}} \right)$$

となる. また

$$\left(\begin{pmatrix} 2\nu+1 & -\frac{1+a(2\nu+1)}{8} \\ 8 & -a \end{pmatrix}, (8z-a)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8}{-a}\right) \varepsilon_{-a}^{-1} \right) \in \widetilde{\Gamma}_0(4)$$

であり, $f \in M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ であることから,

$$\begin{aligned} s_2(f) &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda-3} \sum_{\nu \bmod 4} f \left| \left[\left(\begin{pmatrix} 8 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \varepsilon_{-a} \left(\frac{8}{-a}\right) (-i)^{\frac{1}{2}} \right) \right]_{\frac{k}{2}} \right. \\ &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda-3} \sum_{a \bmod 8} f \left| \left[\left(\begin{pmatrix} 8 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \varepsilon_{-a} \left(\frac{8}{-a}\right) (-i)^{\frac{1}{2}} \right) \right]_{\frac{k}{2}} \right. \\ &= \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda-3} \sum_{a \bmod 8} f\left(z + \frac{a}{8}\right) \left(\varepsilon_{-a} \left(\frac{a}{2}\right) (-i)^{\frac{1}{2}} \right)^{-2\lambda-1} \\ &= \left(\frac{2}{k}\right) e^{\frac{k}{4}\pi i} 2^{\lambda-3} \sum_{n \geqq 0} \left(\sum_{a \bmod 8} \left(\frac{a}{2}\right) \varepsilon_{-a}^{-2\lambda-1} e^{2\pi i \frac{na}{8}} \right) a(n) q^n \end{aligned}$$

となる. λ の偶奇で分けて

$$G_n = \sum_{a \bmod 8} \left(\frac{a}{2}\right) \varepsilon_{-a}^{-2\lambda-1} e^{2\pi i \frac{na}{8}}$$

を計算する. G_n は 8 を法とする n で定まる.

λ が偶数のとき, n は 8 を法として 0, 1, 4, 5 のときを考える. $\lambda = 2l$ とする. ここで, $\chi(a) = \left(\frac{a}{2}\right)\varepsilon_{-a}^{-1}$ とすると, $\chi(1) = -i, \chi(3) = -1, \chi(5) = i, \chi(7) = 1$ である. よって,

$$\begin{aligned} G_0 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a) = 0, \\ G_1 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a) e^{2\pi i \frac{a}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i+1+1-i-i+1+1-i) = \frac{4}{\sqrt{2}}(1-i) = 4e^{\frac{7\pi i}{4}}, \\ G_4 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a) e^{2\pi i \frac{4a}{8}} = \sum_{a \bmod 8} \chi(a)(-1)^a = -G_0 = 0, \\ G_5 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a) e^{2\pi i \frac{5a}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i-1-1+i+i-1-1+i) = \frac{4}{\sqrt{2}}(-1+i) = 4e^{\frac{3\pi i}{4}}, \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} s_2(f) &= \left(\frac{2}{4l+1}\right) e^{\frac{4l+1}{4}\pi i} 2^{\lambda-3} \sum_{n \geqq 0} G_n a(n) q^n \\ &= (-1)^l (-1)^l e^{\frac{\pi i}{4}} 2^{\lambda-3} \left(\sum_{n \bmod 1} 4e^{\frac{7\pi i}{4}} a(n) q^n + \sum_{n \bmod 5} 4e^{\frac{3\pi i}{4}} a(n) q^n \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{k-1}\left(\sum_{n \bmod 1} a(n)q^n - \sum_{n \bmod 5} a(n)q^n\right)\\
&= 2^{k-1}\sum_{n\geqq 0}\left(\frac{n}{2}\right)a(n)q^n
\end{aligned}
$$

となり, 求める結果となった.

λ が奇数のとき, n は 8 を法として 0, 3, 4, 7 のときを考える. $\lambda = 2l+1$ とする. ここで $\chi(a) = \left(\frac{a}{2}\right)\varepsilon_{-a}^{-3}$ とすると, $\chi(1) = i, \chi(3) = -1, \chi(5) = -i, \chi(7) = 1$ である. よって,

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a) = 0,\\
G_3 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a)e^{2\pi i\frac{3a}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i-1-1-i-i-1-1-i) = \frac{4}{\sqrt{2}}(-1-i) = 4e^{\frac{5\pi i}{4}},\\
G_4 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a)e^{2\pi i\frac{4a}{8}} = \sum_{a \bmod 8} \chi(a)(-1)^a = -G_0 = 0,\\
G_7 &= \sum_{a \bmod 8} \chi(a)e^{2\pi i\frac{7a}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1+1+i+i+1+1+i) = \frac{4}{\sqrt{2}}(1+i) = 4e^{\frac{\pi i}{4}},
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$
\begin{aligned}
s_2(f) &= \left(\frac{2}{4l+3}\right)e^{\frac{4l+3}{4}\pi i}2^{\lambda-3}\sum_{n\geqq 0} G_n a(n)q^n\\
&= (-1)^{l+1}(-1)^l e^{\frac{3\pi i}{4}}2^{\lambda-3}\left(\sum_{n \bmod 3} 4e^{\frac{5\pi i}{4}}a(n)q^n + \sum_{n \bmod 7} 4e^{\frac{\pi i}{4}}a(n)q^n\right)\\
&= 2^{k-1}\left(-\sum_{n \bmod 3} a(n)q^n + \sum_{n \bmod 7} a(n)q^n\right)\\
&= 2^{k-1}\sum_{n\geqq 0}\left(\frac{-n}{2}\right)a(n)q^n
\end{aligned}
$$

となり, 求める結果となった.

以上より (6.1) が示された.

次に $T^+_{\frac{k}{2}}(4)$ のエルミート性を確かめる. $f, g \in S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ とする. U_4W_4 は $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ 上のエルミート作用素であり, W_4^2 が恒等変換であることから,

$$
\begin{aligned}
\langle f|T^+_{\frac{k}{2}}(4), g\rangle &= \langle f|W_4U_4W_4, g\rangle - \alpha_2\langle f|W_4, g\rangle\\
&= \alpha_1\langle f|W_4, g\rangle - \alpha_2\langle f, g_1\rangle - \alpha_2\langle f, g_2\rangle = \alpha_1\langle f, g|W_4\rangle - \alpha_2\langle f, g_1\rangle - \alpha_2\langle f, g_2\rangle\\
&= \alpha_1\langle f, g_1\rangle + \alpha_1\langle f, g_2\rangle - \alpha_2\langle f, g_1\rangle - \alpha_2\langle f, g_2\rangle = \alpha_1\langle f, g_1\rangle - \alpha_2\langle f, g_1\rangle\\
&= \langle f, g_1|(U_4W_4 - \alpha_2)\rangle = \langle f, g_1|(U_4W_4 - \alpha_2)\rangle + \langle f, g_2|(U_4W_4 - \alpha_2)\rangle\\
&= \langle f, g|W_4(U_4W_4 - \alpha_2)\rangle
\end{aligned}
$$

となり, $T^+_{\frac{k}{2}}(4)$ は確かにエルミート作用素になっている. 以上より定理 1.2 の (i) が示された.

(ii) を示す. 主張が $p=2$ で満たされること以外は [10, Shimura, pp.451-453] の結果より従う. また $p=2$ のときも [10] と同様の議論でできる.

$T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ はヒルベルト空間 $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ 上のエルミート作用素の可換代数を生成する. よって $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ はすべての $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ の固有形式からなる直交基底を持つ. 補題 5.14 より, そのような固有形式は固有値に対して定数倍を除いて一意的に定まる.

$f(z)=\sum_{n\geqq 1}a(n)q^n\in S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$, すべての素数 p に対して $f|T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)=\lambda_p f$ とする. また D を基本判別式で $(-1)^\lambda D$ が正になるものをとる. このときヘッケ作用素を作用させた後のフーリエ展開を考えることで

$$\sum_{n\geqq 1}a(|D|n^2)n^{-s}=\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)p^{\lambda-1-s}\right)\left(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-2-2s}\right)^{-1}\sum_{\substack{n\geqq 1\\(n,p)=1}}a(|D|n^2)n^{-s}$$

が成立する. このことから

$$\sum_{n\geqq 1}a(|D|n^2)n^{-s}=a(|D|)\prod_p\left(1-\left(\frac{D}{p}\right)p^{\lambda-1-s}\right)\left(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-2-2s}\right)^{-1}\tag{6.2}$$

すなわち

$$L\left(s-\lambda+1,\left(\frac{D}{-}\right)\right)\sum_{n\geqq 1}a(|D|n^2)n^{-s}=a(|D|)\prod_p\left(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-2-2s}\right)^{-1}$$

が成り立つ. ここで, オイラー積 $\prod_p\left(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-2-2s}\right)^{-1}$ に対応するディリクレ級数から定まる関数を F とする. この F は (iii) の $\mathscr{S}^+_{D,k}$ を f に作用させたものになっている. よって, (iii) を示せば (ii) も示したことになる.

(iii) を示す. $f(z)=\sum_{n\geqq 0}a(n)q^n\in M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ とする. まず, ヘッケ作用素と $\mathscr{S}^+_{D,k}$ の可換性を示す. p を素数として, $f|\mathscr{S}^+_{D,k}T_{k-1}(p)$, $f|T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)\mathscr{S}^+_{D,k}$ の q 展開係数をそれぞれ $c_1(n),c_2(n)$ とすると,

$$c_1(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1+p^{k-2})L\left(1-\lambda,\left(\dfrac{D}{-}\right)\right)a(0) & (n=0)\\ \displaystyle\sum_{d|pn}\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}a\left(\frac{p^2n^2}{d^2}|D|\right)+\sum_{d|\frac{n}{p}}\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}p^{k-2}a\left(\frac{n^2}{p^2d^2}|D|\right) & (n\geqq 1)\end{cases},$$

$$c_2(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1+p^{k-2})L\left(1-\lambda,\left(\dfrac{D}{-}\right)\right)a(0) & (n=0)\\ \displaystyle\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}a\left(\frac{p^2n^2}{d^2}|D|\right)+\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\left(\frac{(-1)^\lambda\frac{n^2}{d^2}|D|}{p}\right)(pd)^{\lambda-1}a\left(\frac{n^2}{d^2}|D|\right) & \\ \displaystyle\qquad+\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}p^{k-2}a\left(\frac{n^2}{p^2d^2}|D|\right) & (n\geqq 1)\end{cases}$$

となる. すべての n に対して, $c_1(n) = c_2(n)$ であることを示せばよい.

$c_1(0) = c_2(0)$ は確かに成り立つ.

$n > 0$ とし, $n = p^e n'$ $((p, n') = 1)$ とする. まず $c_1(n)$ について整理する.

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e+1} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} a\left(\frac{p^2 n^2}{(p^l d)^2}|D|\right) + \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e-1} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} p^{k-2} a\left(\frac{n^2}{(p^{l+1} d)^2}|D|\right) \\ &= \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} a\left(\frac{p^2 n^2}{(p^l d)^2}|D|\right) + \left(\frac{D}{p^{e+1} d}\right)(p^{e+1} d)^{\lambda-1} a\left(\frac{n^2}{p^{2e} d^2}|D|\right) \\ &\qquad + \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e-1} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} p^{k-2} a\left(\frac{n^2}{(p^{l+1} d)^2}|D|\right). \end{aligned}$$

次に $c_2(n)$ について整理する.

$$\begin{aligned} c_2(n) &= \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} a\left(\frac{p^2 n^2}{(p^l d)^2}|D|\right) \\ &\qquad + \sum_{d|n} \sum_{l=0}^{e} \left(\frac{D}{p^l d}\right)\left(\frac{(-1)^{\lambda} \frac{n^2}{(p^l d)^2}|D|}{p}\right)(p^{l+1} d)^{\lambda-1} a\left(\frac{n^2}{(p^l d)^2}|D|\right) \\ &\qquad + \sum_{d|n} \sum_{l=0}^{e} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} p^{k-2} a\left(\frac{n^2}{(p^{l+1} d)^2}|D|\right). \end{aligned}$$

ここで $c_2(n)$ の 2 つ目の和に関しては

$$\frac{n^2}{(p^l d)^2} = p^{e-l} \frac{n'^2}{d^2}$$

より $l \neq e$ ならば $(-1)^{\lambda} \frac{n^2}{(p^l d)^2}|D|$ と p が互いに素でなくなるので, $\left(\frac{(-1)^{\lambda} \frac{n^2}{(p^l d)^2}|D|}{p}\right)$ が 0 になる. $l = e$ のとき,

$$\left(\frac{(-1)^{\lambda} \frac{n^2}{(p^l d)^2}|D|}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\lambda} \frac{n'^2}{d^2}|D|}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\lambda}|D|}{p}\right)\left(\frac{\frac{n'}{d}}{p}\right)^2 = \left(\frac{D}{p}\right)$$

となる.

また 3 つ目の和は $l = e$ のとき

$$a\left(\frac{n^2}{(p^{e+1} d)^2}|D|\right) = a\left(\frac{n'^2|D|}{p^2 d^2}\right)$$

となり, $|D|$ は 2 以外は平方因子を持たないので $p \neq 2$ のとき, $\frac{n'^2|D|}{p^2 d^2}$ は整数にならず $a\left(\frac{n'^2|D|}{p^2 d^2}\right)$ は 0 になる. $p = 2$ のときは $D = 4d'$ $(d' \equiv 2, 3 \pmod 4)$ とかけるときに

$\frac{n'^2|D|}{4d^2} = \frac{n'^2|d'|}{d^2}$ は整数となる. ここで n', d が奇数であることと, $(-1)^\lambda D > 0$ であることから,

$$\begin{aligned}(-1)^\lambda \frac{n'^2|d'|}{d^2} &= (-1)^\lambda |d'| \frac{n'^2}{d^2} \\ &\equiv (-1)^\lambda |d'| \equiv 2, 3 \pmod 4\end{aligned}$$

となり $f(z) \in M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ より $a\left(\frac{n'^2|d'|}{d^2}\right)$ は 0 になる. よって,

$$\begin{aligned}c_2(n) = \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} a\left(\frac{p^2n^2}{(p^l d)^2}|D|\right) + \left(\frac{D}{p^{e+1}d}\right)(p^{e+1}d)^{\lambda-1} a\left(\frac{n^2}{(p^e d)^2}|D|\right) \\ + \sum_{d|n'} \sum_{l=0}^{e-1} \left(\frac{D}{p^l d}\right)(p^l d)^{\lambda-1} p^{k-2} a\left(\frac{n^2}{(p^{l+1}d)^2}|D|\right).\end{aligned}$$

となり, $c_1(n) = c_2(n)$ となる.

よって, すべての素数 p に対し, $f|\mathscr{S}^+_{D,k} T_{k-1}(p) = f|T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)\mathscr{S}^+_{D,k}$ が成り立つ.

次に $(D, k) \neq (1, 1)$ となるとき, $\mathscr{S}^+_{D,k}$ が $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $M_{k-1}(\Gamma)$ への写像となっていることを示す.

$k < 0, k = 3$ のときは $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \{0\}$ より明らか.

$k = 1$ のときを考える. $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \mathbb{C}\theta$ であり, $D \neq 1$ より D が平方数でないことから $\theta|\mathscr{S}^+_{D,1} = \frac{1}{2}L\left(1, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)$ となり主張を満たす.

$k > 3$ のとき, 命題 5.2 から $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \mathbb{C}H_{\frac{k}{2}} \oplus S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ であった. まず $H_{\frac{k}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,k} = \frac{1}{2}L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)E_{k-1}$ であることを示す.

定数項の部分は両辺とも $\frac{1}{2}L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)$ である. $H_{\frac{k}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,k}$ の n 番目の係数は,

$$\begin{aligned}&\frac{L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\zeta(2-k)} \sum_{d|n} \sum_{e|\frac{n}{d}} \mu(e) \left(\frac{D}{ed}\right)(ed)^{\lambda-1} \sigma_{k-2}\left(\frac{n}{ed}\right) \\ &= \frac{L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\zeta(2-k)} \sum_{d|d'|n} \mu\left(\frac{d'}{d}\right)\left(\frac{D}{d'}\right)(d')^{\lambda-1}\sigma_{k-2}\left(\frac{n}{d'}\right) \\ &= \frac{L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\zeta(2-k)} \sum_{d'|n} \left(\sum_{d|d'} \mu\left(\frac{d'}{d}\right)\right)\left(\frac{D}{d'}\right)(d')^{\lambda-1}\sigma_{k-2}\left(\frac{n}{d'}\right)\end{aligned}$$

となり, $\sum_{d|d'} \mu\left(\frac{d'}{d}\right)$ は $d' = 1$ 以外では 0 になるので, 全体として $\frac{L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\zeta(2-k)}\sigma_{2k-1}(n)$ となる. $E_{k-1}(z) = 1 + \frac{2}{\zeta(2-k)}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-2}(n)q^n$ より, $H_{\frac{k}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,k} = \frac{1}{2}L\left(1-\lambda, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)E_{k-1}$ は確かに成り立つ. あとは $\mathscr{S}^+_{D,k}$ が $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $S_{k-1}(\Gamma)$ への写像となっていることを示せばよい.

まず $D \equiv 0 \pmod 4$ のときを考える. このとき, 平方因子を持たない $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ により $D = 4d$ とかける. $f(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)q^n \in M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ に命題 4.20 の志村対応 $\mathscr{S}_{d,k}$

を作用させたものを考えると, $f|\mathscr{S}_{d,k} = \sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{j|n}\left(\frac{4d}{j}\right) j^{\lambda-1}a\left(\frac{n^2}{j^2}|d|\right)\right)q^n \in S_{k-1}(\Gamma_0(2))$ となる. ここで n を奇数とすると $(-1)^\lambda \frac{n^2}{j^2}|d| \equiv 2, 3 \pmod 4$ となるから, 奇数次の項の係数は 0 になる. よって,

$$f|\mathscr{S}^+_{D,k} = f|\mathscr{S}_{d,k}|U_2 \tag{6.3}$$

となる.

ここで $U_2 = 2^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{1}\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ であるから, $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ として,

$$f(z)|\mathscr{S}_{d,k}|U_2 = f_1(z) + f_2(z)\ (f_1(z) = f(z)|\,[\alpha]_{k-1}\,, f_2(z) = f(z)|\,[\beta]_{k-1})$$

とする. ただし, どちらとも $f|\mathscr{S}_{d,k}$ の奇数次の項が出ないことから $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の作用で不変であることはわかっている.

まず f_1 については, $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma_0(2)\alpha \cap \Gamma$ に対する重さ $k-1$ のカスプ形式となっている. ここで,

$$\alpha^{-1}\begin{pmatrix}a & b\\ 2c & d\end{pmatrix}\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 2b\\ c & d\end{pmatrix}$$

となる. Γ は $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で生成されることと, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となることから, f_1 は Γ の元で不変. よって $f_1 \in S_{k-1}(\Gamma)$ となる.

次に f_2 については, $\Gamma'' = \beta^{-1}\Gamma_0(2)\beta \cap \Gamma$ に対する重さ $k-1$ のカスプ形式となっている. ここで,

$$\beta^{-1}\begin{pmatrix}a & b\\ 2c & d\end{pmatrix}\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-c & a-c-d+2b\\ c & c+d\end{pmatrix}$$

となる. $a = c = 1, b = d = -1$ とすると $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ となることから, f_2 は Γ の元で不変. よって $f_2 \in S_{k-1}(\Gamma)$ となる.

これらのことから $f|\mathscr{S}^+_{D,k} = f|\mathscr{S}_{d,k}|U_2 \in S_{k-1}(\Gamma)$ となり確かに $\mathscr{S}^+_{D,k}$ は $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $S_{k-1}(\Gamma)$ への写像となっている.

以上より, $D \equiv 0 \pmod 4$ のとき $\mathscr{S}^+_{D,k}$ は $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $M_{k-1}(\Gamma)$ への写像となっていることがわかった.

次に同型となる線形結合を $D \equiv 0 \pmod 4$ のものだけで生成する. そのためにまず f が 0 でない固有形式ならば $(-1)^\lambda D > 0$ となる基本判別式に対し, f の q 展開係数で $a(|D|) = 0$ でないものが存在することを背理法を用いて示す.

$(-1)^\lambda D > 0$ となる全ての基本判別式 D に対し, $a(|D|) = 0$ と仮定する. $g = f|U_4$ とすると, $g(z) = \sum_{n\geqq 0} a(4n)q^n$ となる. $n \equiv 2 \pmod 4$ となる n に対して, ある基本判別式 D' と正の整数 m により, $a(4n) = a(D'm^2)$ とかける. ここで f の q 展開係数に対する

ディリクレ級数のオイラー積 (6.2) 考えると, 仮定から $a(D'm^2) = 0$ である. よって, g の $n \equiv 2 \pmod 4$ となる n 番目の q 展開係数は 0 になる. ゆえに,

$$g\left|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, 1\right)\right]_{\frac{k}{2}} + g\right|\left[\left(\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, 1\right)\right]_{\frac{k}{2}} = 4^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} 2\, g \left| U_4 \left[\left(\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 4^{-\frac{1}{4}}\right)\right]_{\frac{k}{2}}\right. \tag{6.4}$$

となる. 上式に出てくる関数はすべて $S_{\frac{k}{2}}\left(\widetilde{\Gamma}_0(16)\right)$ の元である. ここでトレース作用素 $Tr : S_{\frac{k}{2}}\left(\widetilde{\Gamma}_0(16)\right) \to S_{\frac{k}{2}}\left(\widetilde{\Gamma}_0(4)\right)$ を

$$h|Tr = \sum_{A_j \in \Gamma_0(16)\backslash\Gamma_0(4)} h|\widetilde{A_j}$$

で定義する. (6.4) の両辺にトレース作用素を作用させることを考える. [9, Niwa, pp.200-201] より

$$\left(\begin{pmatrix}4 & \pm 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, 1\right) Tr = 4^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}} e^{\pm\frac{2\pi i k}{8}} U_4 W_4,$$

$$U_4 \left(\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 4^{-\frac{1}{4}}\right) Tr = 4^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}} (U_4 W_4)^2$$

が成立する. よって (6.4) の左辺は

$$4^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}} \cdot 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2\pi i k}{8}}\right) g|U_4 W_4 = \left(\frac{2}{k}\right) 2^{-\lambda+2} g|U_4 W_4$$

となり, 右辺は

$$4^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot 4^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g|(U_4 W_4)^2 = 2^{-2\lambda+2} g|(U_4 W_4)^2$$

となる. よって

$$g|(U_4 W_4)^2 = \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda} g|U_4 W_4$$

となる. ここで $S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ で $U_4 W_4$ の作用の固有値で直交分解でき, かつその固有値が 0 でないから $U_4 W_4$ は単射である. よって, $g|U_4 W_4 = \alpha_1 g$, すなわち $g \in S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ となる. さらに U_4 と奇素数に対する $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ は可換だから, f と g は同じ固有値を持つ. よって補題 5.14 から f と g は定数倍の差異しか無い. その定数を C とすれば,

$$Cf = g = f|U_4 = \left(\frac{2}{k}\right) 2^{\lambda} f|W_4$$

となる. これと $W_4^2 = 1$ を考えれば $C = \pm 2^{-\lambda}$ となる. さらに命題の証明で用いた ψ^+ を作用させて補題 5.14 と同じ計算をすることで, $f|\psi^+|T_{k-1}(2) = \pm(2^{\lambda} + 2^{\lambda-1}) f|\psi^+$ となる.
次の定理はドリーニュの定理である.

定理 6.5. [15, 土井, 三宅, p.169, 定理 4.5.17][3, Deligne]

$f(z)=\sum_{n\geqq 1}a(n)q^n\in S_k(N,\chi)$ を正規化した同時固有形式とする. p が N を割らない素数であるとすると,

$$a(p)\leqq 2p^{\frac{k-1}{2}}$$

が成り立つ.

$f|\psi^+\in S_{k-1}(\Gamma)$ でヘッケ作用素の同時固有形式だから, $T_{k-1}(2)$ の固有値は $2^{\frac{k}{2}}$ を超えない. しかし,

$$2^\lambda+2^{\lambda-1}=\frac{3}{2}2^\lambda=2^{\frac{k}{2}}\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

より $\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$ であるから, $f|\psi^+=0$ すなわち $f=0$ になり矛盾する. よって, $(-1)^\lambda D>0$ となる基本判別式に対し, f の q 展開係数で $a(|D|)=0$ でないものが存在する.

そこで $f_1,\cdots,f_r$ を同時固有形式からなる直交基底とし, $f_j=\sum_{n\geqq 1}a_j(n)q^n$ とする. また f_j に対し $(-1)^\lambda D_j>0$ で $a_j(|D_j|)\neq 0$ となる基本判別式 D_j が存在する. ここで

$$P(X_1,\cdots,X_r)=\prod_{1\leqq j\leqq r}\Big(a_j(D_1)X_1+\cdots+a_j(|D_r|)X_r\Big)$$

とする. これは 0 でない多項式であるから, $P(c_1,\cdots,c_r)\neq 0$ となる $(c_1,\cdots,c_r)\in\mathbb{C}^r$ が存在する. この $(c_1,\cdots,c_r)$ を用いて

$$\mathscr{S}_k^+=c_1\mathscr{S}_{D_1,k}^+ +\cdots+c_r\mathscr{S}_{D_r,k}^+$$

とおく. 各 $\mathscr{S}_{D_j,k}^+$ とヘッケ作用素が可換であることから, $\mathscr{S}_k^+$ とヘッケ作用素も可換である. よって, f_j と $f_j|\mathscr{S}_k^+$ が同じ固有値を持つことから, 補題 5.14 より $\mathscr{S}_k^+$ は単射であり, $\dim M_{\frac{k}{2}}^+(\widetilde{\Gamma}_0(4))=\dim M_{k-1}(\Gamma)$ より $\mathscr{S}_k^+$ は全単射となり確かに同型となる線形結合の存在が示された.

最後に $D\equiv 1\pmod 4$ のとき $\mathscr{S}_{D,k}^+$ が $S_{\frac{k}{2}}^+(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $S_{k-1}(\Gamma)$ への写像になっていることを示す. $g\in S_{k-1}(\Gamma)$ を正規化された固有形式とし, $g|T_{k-1}(p)=\omega_p g$ とする. g の q 展開係数は $\sum_{n\geqq 1}\omega(n)n^{-s}=\prod_p\left(1-\omega_p p^{-s}+p^{k-2-2s}\right)^{-1}$ で決まる $\omega(n)$ を用いて, $\sum_{n\geqq 1}\omega(n)q^n$ とかける. ここで $\mathscr{S}_k^+$ の逆対応を ϕ^+ とし, $G=g|\phi^+\mathscr{S}_{D,k}^+$ とする. このとき G は $\mathbb{H}$ 上収束する q のべき級数として表され, $G|T_{k-1}(p)=\omega_p G$ となる. このとき $g|\phi^+\mathscr{S}_{D,k}^+$ の一次の項の係数を c とすれば, G の q^n の係数は $c\omega(n)$, すなわち $g|\phi^+\mathscr{S}_{D,k}^+=cg$ となる. ここで ϕ^+ が全単射であることから, $\mathscr{S}_{D,k}^+$ は $S_{\frac{k}{2}}^+(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ から $S_{k-1}(\Gamma)$ への写像になっている. □

6.2 定理 1.3 の証明

定理 1.3 の証明. λ を偶数とする. $S_{2\lambda}^0(\Gamma)$ を $L_g(\lambda)\neq 0$ を満たす $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する重さ 2λ の正規化された固有形式で張られる $S_{2\lambda}(\Gamma)$ の部分空間とする. これからまず示すことは

$$S_{2\lambda}^0(\Gamma)=S_{\frac{k}{2}}^+(\widetilde{\Gamma}_0(4))|\mathscr{S}_{1,k}^+$$

である. 次の結果がランキン · セルバーグの方法の基本的な場合であり, 定理 1.3 の証明の基本的な部分である.

補題 6.6. [13, Zagier, p.145, Proposition 5]

N を 1 または 4, k_2 を整数とする. k_1 を $k_2 \geqq k_1 + 2 > 2$ であり, $N = 1$ ならば $k_1 \in 2\mathbb{Z}$, $N = 4$ ならば $k_1 \in 2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ となるようにとる. E_{k_2} を正規化した $\Gamma_0(N)$ に対する重さ k_2 のアイゼンシュタイン級数とし,

$$f(z) = \sum_{n \geqq 1} a(n) q^n \in S_{k_1+k_2}(N),$$
$$g(z) = \sum_{n \geqq 0} b(n) q^n \in M_{k_1}(N)$$

とする. このとき

$$\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)E_{k_2}(z)} y^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} = \frac{\Gamma(k_1+k_2-1)}{(4\pi)^{k_1+k_2-1}} \sum_{n \geqq 1} \frac{a(n)\overline{b(n)}}{n^{k_1+k_2-1}} \tag{6.7}$$

となる.

補題 6.6 の証明. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{H}$ のとき, $J_k(\gamma, z) = (cz+d)^k$ とする. このとき (6.7) の左辺は,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \overline{J_{k_2}(\gamma, z)^{-1}} y^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} J_{k_1+k_2}(\gamma, z)^{-1} f(\gamma z) \overline{J_{k_1}(\gamma, z)^{-1}}\overline{g(\gamma z)}\overline{J_{k_2}(\gamma, z)^{-1}} |J_{k_1+k_2}(\gamma, z)^2| \mathrm{Im}\,(\gamma z)^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)} \mathrm{Im}\,(\gamma z)^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)} y^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 \sum_{n,m \geqq 1} a(n)\overline{b(m)} e^{2\pi i(n-m)x} e^{-2\pi(n+m)y} y^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{n,m \geqq 1} a(n)\overline{b(m)} \int_0^\infty \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} e^{-2\pi(n+m)y} y^{k_1+k_2} \frac{dxdy}{y^2}
\end{aligned}$$

となる. ここで x での積分では $n \neq m$ でない項以外は 0 になるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geqq 1} a(n)\overline{b(n)} \int_0^\infty e^{-4\pi ny} y^{k_1+k_2-1} \frac{dy}{y} &= \sum_{n \geqq 1} a(n)\overline{b(n)} \frac{1}{(4\pi n)^{k_1+k_2-1}} \Gamma(k_1+k_2-1) \\
&= \frac{\Gamma(k_1+k_2-1)}{(4\pi)^{k_1+k_2-1}} \sum_{n \geqq 1} \frac{a(n)\overline{b(n)}}{n^{k_1+k_2-1}}
\end{aligned}$$

となり, (6.7) は示された. □

補題 6.8. [14, 黒川, 栗原, 斎藤, pp.422-426, 定理 9.10]
$g(z) = \sum_{n \geqq 1} b(n)q^n \in S_{2k}(\Gamma)$ を正規化した同時固有形式とする. このとき

$$\sum_{n \geqq 1} \sigma_r(n)b(n)n^{-s} = \left(\sum_{n \geqq 1} b(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n \geqq 1} b(n)n^{r-s}\right)\zeta(2s - r - 2k + 1)^{-1} \tag{6.9}$$

が成立する.

証明. $\sigma_r(n), b(n)$ は乗法的であるから,

$$\sum_{n \geqq 1} \sigma_r(n)b(n)n^{-s} = \prod_p \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sigma_r(p^l)b(p^l)p^{-ls}\right) \tag{6.10}$$

となる. ここで $\sum_{n \geqq 1} b(n)n^{-s}$ のオイラー積表示 [5, Koblitz, pp.163-164] より,

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqq 1} b(n)n^{-s} &= \prod_p \left(1 - b(p)p^{-s} + p^{2k-1-2s}\right)^{-1} \\ &= \prod_p \left((1 - \beta_1(p)p^{-s})\,(1 - \beta_2(p)p^{-s})\right)^{-1}\end{aligned}$$

を考えると,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} b(p^l)p^{-ls} &= \frac{1}{(1 - \beta_1(p)p^{-s})\,(1 - \beta_2(p)p^{-s})} \\ &= \left(1 + \beta_1(p)p^{-s} + \beta_1(p)^2p^{-2s} + \cdots\right)\left(1 + \beta_2(p)p^{-s} + \beta_2(p)^2p^{-2s} + \cdots\right)\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}b(p^l) &= \beta_1(p)^l + \beta_1(p)^{l-1}\beta_2(p) + \beta_1(p)^{l-2}\beta_2(p)^2 + \cdots + \beta_2(p)^l \\ &= \frac{\beta_1(p)^{l+1} - \beta_2(p)^{l+1}}{\beta_1(p) - \beta_2(p)}\end{aligned}$$

となる. ここで, $\beta_1(p), \beta_2(p)$ については

$$\beta_1(p)\beta_2(p) = p^{2k-1}$$

が成り立つことに注意する.
次に,

$$\begin{aligned}\sigma_r(p^l) &= 1 + p^r + p^{2r} + \cdots + p^{(l+1)r} \\ &= \frac{1 - p^{(l+1)r}}{1 - p^r}\end{aligned}$$

となる.

よって, (6.10) より,

$$\sum_{n\geqq 1}\sigma_r(n)b(n)n^{-s} = \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1-p^{(l+1)r}}{1-p^r}\frac{\beta_1(p)^{l+1}-\beta_2(p)^{l+1}}{\beta_1(p)-\beta_2(p)}p^{-ls}\right)$$

$$= \prod_p\frac{1}{(1-p^r)(\beta_1(p)-\beta_2(p))}$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\beta_1(p)(\beta_1(p)p^{-s})^l - p^r\beta_1(p)(\beta_1(p)p^{r-s})^l$$

$$-\beta_2(p)(\beta_2(p)p^{-s})^l + p^r\beta_2(p)(\beta_2(p)p^{r-s})^l\Big)$$

$$= \prod_p\frac{1}{(1-p^r)(\beta_1(p)-\beta_2(p))}$$

$$\times\left(\frac{\beta_1(p)}{1-\beta_1(p)p^{-s}}-\frac{p^r\beta_1(p)}{1-\beta_1(p)p^{r-s}}-\frac{\beta_2(p)}{1-\beta_2(p)p^{-s}}+\frac{p^r\beta_2(p)}{1-\beta_2(p)p^{r-s}}\right)$$

$$= \prod_p\frac{1}{(1-p^r)(\beta_1(p)-\beta_2(p))}$$

$$\times\left(\frac{\beta_1(p)(1-p^r)}{(1-\beta_1(p)p^{-s})(1-\beta_1(p)p^{r-s})}-\frac{\beta_2(p)(1-p^r)}{(1-\beta_2(p)p^{-s})(1-\beta_2(p)p^{r-s})}\right)$$

$$= \prod_p\frac{1}{(\beta_1(p)-\beta_2(p))}$$

$$\times\left(\frac{\beta_1(p)-\beta_2(p)-\beta_1(p)\beta_2(p)p^{r-2s}\beta_1(p)-\beta_2(p)}{(1-\beta_1(p)p^{-s})(1-\beta_1(p)p^{r-s})(1-\beta_2(p)p^{-s})(1-\beta_2(p)p^{r-s})}\right)$$

$$= \prod_p\left(\frac{1-p^{2k-1+r-2s}}{(1-\beta_1(p)p^{-s})(1-\beta_1(p)p^{r-s})(1-\beta_2(p)p^{-s})(1-\beta_2(p)p^{r-s})}\right)$$

$$= \left(\prod_p((1-\beta_1(p)p^{-s})(1-\beta_2(p)p^{-s}))^{-1}\right)\left(\prod_p((1-\beta_1(p)p^{r-s})(1-\beta_2(p)p^{r-s}))^{-1}\right)$$

$$\times\left(\prod_p(1-p^{2k-1+r-2s})\right)$$

$$= \left(\sum_{n\geqq 1}b(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geqq 1}b(n)n^{r-s}\right)\zeta(2s-r-2k+1)^{-1}$$

となる. □

まず $S^0_{2\lambda}(\Gamma)\subset S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))|\mathscr{S}^+_{1,k}$ を示す.

$g(z) = \sum_{n\geqq 1}b(n)q^n \in S_{2\lambda}(\Gamma)$ を正規化した同時固有形式とし, $G'_l(z) = \frac{1}{2}\zeta(1-l) + \sum_{n\geqq 1}\sigma_{l-1}(n)q^n$ とする. また $L_g(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n\geqq 1}b(n)n^{-s}$ とする. ここで内積 $\langle g, G'^2_\lambda\rangle$ を計算する. 補題 6.6, 6.8 を用いて

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} g(z)\overline{G'_r(z)G'_{2\lambda-r}(z)}y^{2\lambda}\frac{dxdy}{y^2} \tag{6.11}$$

を計算する. まず $k_1 = r, k_2 = 2\lambda - r, 4 \leqq r \leqq k-2$ として補題 6.6 を用いると (6.11) は,

$$\frac{1}{2}\zeta(1-2k+r)\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{n\geqq 1}\frac{b(n)\sigma_{r-1}(n)}{n^{2k-1}} \tag{6.12}$$

となる. (6.9) と命題 3.32 の関数等式を用いると, (6.12) は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\zeta(1-2k+r)\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{n\geqq 1}\frac{b(n)}{n^{2k-1}}\sum_{n\geqq 1}\frac{n^{r-1}b(n)}{n^{2k-1}}\\
=&\frac{1}{2}\zeta(1-2k+r)2^{-2k+1}L_g(2k-1)L_g(2k-r)\zeta(2k-r)^{-1}\Gamma(2k-r)^{-1}(\pi)^{2k-r}\\
=&\frac{1}{2}\zeta(1-2k+r)\zeta(2k-r)^{-1}\Gamma(2k-r)^{-1}(2\pi)^{2k-r}2^{-2k+1}L_g(2k-1)L_g(r)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

となる. リーマンゼータ関数の整数値での値のベルヌーイ数表示から, (6.13) は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot(-1)\frac{B_{2k-r}}{2k-r}(-1)^{-k+\frac{r}{2}-1}\frac{2\cdot(2k-r)!}{(2\pi)^{2k-r}\cdot B_{2k-r}}\frac{1}{(2k-r-1)!}(2\pi)^{2k-r}2^{-2k+1}L_g(2k-1)L_g(r)\\
=&(-1)^{-k+\frac{r}{2}}2^{-2k+1}L_g(2k-1)L_g(r)
\end{aligned}$$

となる. 同様のことを $k_1 = 2\lambda - r, k_2 = r, k+2 \leqq r \leqq 2k-4$ で計算すれば,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} g(z)\overline{G_r'(z)G_{2\lambda-r}'(z)}y^{2\lambda}\frac{dxdy}{y^2} = (-1)^{\frac{r}{2}}2^{-2\lambda+1}L_g(2\lambda-1)L_g(r) \tag{6.14}$$

が $4 \leqq r \leqq 2\lambda - 4, r \neq \lambda$ で成り立つ. (6.14) が $r = \lambda$ でも成り立つことを確かめる.

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の微分方程式 $\wp''(\tau) = 6\wp(\tau) - 30G_4'(z)$ を考えることにより $\lambda \geqq 4$ に対して,

$$\begin{aligned}
\frac{(2\lambda-6)(2\lambda+1)}{12}\cdot\frac{1}{(2\lambda-2)!}G_{2\lambda}' = \frac{1}{2!(2\lambda-6)!}G_4'G_{2\lambda-4}' + \frac{1}{4!(2\lambda-8)!}G_6'G_{2\lambda-6}'\\
+\cdots+\frac{1}{2!(2\lambda-6)!}G_4'G_{2\lambda-4}'
\end{aligned}$$

が成り立つ [11, Swinnerton-Dyer, p.19]. この両辺と g の内積を考え, $\langle g, G_{2k}'\rangle = 0$ より

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} g(z)\overline{G'^2_\lambda(z)}y^{2\lambda}\frac{dxdy}{y^2} &= 2^{-2\lambda+1}L_g(2\lambda-1)\cdot 2(\lambda-2)!\\
&\cdot\left(-\frac{1}{2!(2\lambda-6)!}L_g(4) + \frac{1}{4!(2\lambda-8)!}L_g(6) \mp \cdots + (-1)^{\frac{\lambda}{2}-1}\frac{1}{\lambda!(\lambda-4)!}L_g(4)\right)
\end{aligned}$$

となる. ここで [7, Lang, pp.68-83, §5] の period relation より, 右辺が $(-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^{-2\lambda+1}L_g(2\lambda-1)L_g(\lambda)$ となり確かに (6.14) は $r = \lambda$ でも成り立つ.

$\sum_{n\geqq 1} b(n)n^{-s}$ のオイラー積表示 [5, Koblitz, pp.163-164] より,

$$\sum_{n\geqq 1} b(n)n^{-s} = \prod_p \left(1 - b(p)p^{-s} + p^{2\lambda-1-2s}\right)^{-1}$$

を考えると, $L_g(2\lambda-1)\neq 0$ である. 補題 5.14 より, $M_{2\lambda}(\Gamma)$ にヘッケ代数が重複度 1 で作用することと, $L_g(\lambda)$ が 0 でないならば $\langle g, {G'_\lambda}^2\rangle$ が 0 にならないことからヘッケ代数上の加群として ${G'}^2_\lambda$ は $\mathbb{C}G'_{2\lambda}\oplus\mathbb{C}S^0_{2\lambda}(\Gamma)$ を生成する.

ここで $G'_\lambda(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{1,k}={G'}^2_\lambda(z)$ となることを確かめる. 形式的に, $\sigma_{\lambda-1}(0)=\frac{1}{2}\zeta(1-\lambda)$ とし,

$$\begin{aligned}
G'_\lambda(4z)\theta(z)&=\left(\sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(n)q^{4n}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}\right)\\
&=\sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},r^2\leqq n\\ r^2\equiv n \pmod 4}}\sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n-r^2}{4}\right)\right)q^n\\
&=\sum_{n\geqq 0}c(n)q^n
\end{aligned}$$

とする. これに $\mathscr{S}^+_{1,k}$ を作用させることで,

$$\begin{aligned}
G'_\lambda(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{1,k}&=\frac{1}{2}\zeta(1-\lambda)c(0)+\sum_{n\geqq 1}\left(\sum_{d|n}d^{\lambda-1}c\left(\frac{n^2}{d^2}\right)\right)q^n\\
&=\left(\frac{1}{2}\zeta(1-\lambda)\right)^2+\sum_{n\geqq 1}\left(\sum_{d|n}d^{\lambda-1}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},|r|\leqq\frac{n}{d}\\ r\equiv\frac{n}{d}\pmod 2}}\sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n^2-r^2d^2}{4d^2}\right)\right)q^n
\end{aligned}$$

となる.

$n\geqq 1$ の部分の係数を計算する. $n_1=\frac{n-rd}{2}, n_2=\frac{n+rd}{2}$ とすると,

$$\sum_{d|n}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},|r|\leqq\frac{n}{d}\\ r\equiv\frac{n}{d}\pmod 2}}d^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n_1n_2}{d^2}\right)=\sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{>0}\\ n_1+n_2=n}}\sum_{d|(n_1,n_2)}d^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n_1n_2}{d^2}\right)$$

となる. この内側の和を計算する.

ここで

$$\begin{aligned}
n_1&=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}\\
n_2&=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_l^{\beta_l}\\
(n_1,n_2)&=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_l^{\gamma_l}
\end{aligned}$$

と素因数分解する. ただし各 i に対し $\alpha_i\geqq 0,\beta_i\geqq 0,\gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$ である. $\sigma_{\lambda-1}$ は乗法性を持つから,

$$\sum_{d|(n_1,n_2)}d^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n_1n_2}{d^2}\right)=\prod_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{\gamma_i}p_i^{(\lambda-1)j}\sigma_{\lambda-1}(p_i^{\alpha_i+\beta_i-2j})$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{\gamma_i} \frac{1}{1-p_i^{(\lambda-1)}} \left(p_i^{(\lambda-1)j} - p_i^{(\lambda-1)(\alpha_i+\beta_i+1-j)}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1-p_i^{(\lambda-1)(\gamma_i+1)}}{(1-p_i^{(\lambda-1)})^2} - p_i^{(\lambda-1)(\alpha_i+\beta_i+1)} \frac{1-p_i^{-(\lambda-1)(\gamma_i+1)}}{(1-p_i^{(\lambda-1)})(1-p_i^{-(\lambda-1)})} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1-p_i^{(\lambda-1)(\gamma_i+1)} + p_i^{(\lambda-1)(\alpha_i+\beta_i+2)} - p_i^{(\lambda-1)(\alpha_i+\beta_i+1-\gamma_i)}}{(1-p_i^{(\lambda-1)})^2} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{1-p_i^{(\lambda-1)(\alpha_i+1)}}{1-p_i^{(\lambda-1)}} \cdot \frac{1-p_i^{(\lambda-1)(\beta_i+1)}}{1-p_i^{(\lambda-1)}} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{l} \sigma_{\lambda-1}(p_i^{\alpha_i})\sigma_{\lambda-1}(p_i^{\beta_i}) \\
&= \sigma_{\lambda-1}(n_1)\sigma_{\lambda-1}(n_2)
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\begin{aligned}
G_\lambda'^2(z) &= \left(\sum_{n\geqq 0} \sigma_{\lambda-1}(n) q^n \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\zeta(1-\lambda) \right)^2 + \sum_{n\geqq 1} \left(\sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{>0} \\ n_1+n_2=n}} \sigma_{\lambda-1}(n_1)\sigma_{\lambda-1}(n_2) \right) q^n
\end{aligned}
$$

より, $G'_\lambda(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{1,k} = G'^2_\lambda(z)$ が成り立つ. これと $\mathscr{S}^+_{1,k}$ とヘッケ作用素が可換であることにより, $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))|\mathscr{S}^+_{1,k}$ は $S^0_{2k}(\Gamma)$ を含む.

$S^0_{2\lambda}(\Gamma) \supset S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))|\mathscr{S}^+_{1,k}$ を示す. $f = \sum_{n\geqq 1} a(n)q^n \in S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ をすべての素数 p に対する $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ に関する同時固有形式とし, 素数 p に対し $T^+_{\frac{k}{2}}(p^2)$ の固有値を λ_p とする. $G'_\lambda(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{1,k} = G'^2_\lambda(z)$ であることから, $\langle f(z), G'_\lambda(4z)\theta(z)\rangle$ を計算する.

[10, Shimuta, p.460, Lemma3.2] より, $\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)$ の代表元は

$$
W_N = \left\{ \{c,d\} \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, (c,d)=1, c\equiv 0 \pmod{N}, c\neq 0 \text{ ならば } c>0, c=0 \text{ ならば } d=1 \right\}
$$

となる整数の組 $\{c,d\}$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ と対応させてとれる. ここで,

$$
W_4 = \{\{4c,d\} \mid \{c,d\}\in W_1\} \setminus \{\{4c,2d\} \mid \{c,d\}\in W_1\}
$$

と取れるから, $\Gamma_0(4)$ のカスプ ∞ に対するアイゼンシュタイン級数 $G^\infty_\lambda(z)$ は $G'_\lambda(z)$ のカスプ ∞ の値を考えることにより,

$$
G^\infty_\lambda(z) = -2^{-\lambda}G'_\lambda(2z) + G'_\lambda(4z)
$$

となる.

ここで, 形式的に $\sigma_{\lambda-1}(0) = \frac{1}{2}\zeta(1-\lambda)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
G'_\lambda(2z)\theta(z) &= \left(\sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(n)q^{2n}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right) \\
&= \sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{\substack{n\geqq r^2,\, r\in\mathbb{Z} \\ n\equiv r^2 \pmod 2}} \sigma_{\lambda-1}\left(\frac{n-r^2}{2}\right)\right)q^n \\
&= \sum_{n\geqq 0} c(n)q^n
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$
\begin{aligned}
G'_\lambda(2z)\theta(z)|U_4 &= \sum_{n\geqq 0} c(4n)q^n \\
&= \sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{\substack{4n\geqq r^2,\, r\in\mathbb{Z} \\ r\in 2\mathbb{Z}}} \sigma_{\lambda-1}\left(\frac{4n-r^2}{2}\right)\right)q^n \\
&= \sum_{n\geqq 0}\left(\sum_{n\geqq r^2,\, r\in\mathbb{Z}} \sigma_{\lambda-1}\left(2n-2r^2\right)\right)q^n \\
&= \left(\sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(2n)q^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right) \\
&= \left(G'_\lambda(z)|U_2\right)\theta(z)
\end{aligned}
$$

となる.

また,

$$
\begin{aligned}
G'_\lambda(z)|U_2 &= \sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(2n)q^n \\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1, n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(2)\sigma_{\lambda-1}(n)q^n + \sum_{n\in 2\mathbb{Z}, n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(2n)q^n \\
&= (1+2^{\lambda-1})\sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1, n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(n)q^n + \sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(4n)q^{2n} \\
&= (1+2^{\lambda-1})\left(G'_\lambda(z) - \sum_{n\in 2\mathbb{Z}, n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(n)q^n\right) + \sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(4n)q^{2n} \\
&= (1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(z) - (1+2^{\lambda-1})\sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(2n)q^{2n} + \sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(4n)q^{2n} \\
&= (1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(z) + \sum_{n\geqq 0}\left(\sigma_{\lambda-1}(4n) - (1+2^{\lambda-1})\sigma_{\lambda-1}(2n)\right)q^{2n}
\end{aligned}
$$

となる. $\sigma_{\lambda-1}(4n) - (1+2^{\lambda-1})\sigma_{\lambda-1}(2n)$ を $n = 2^e n'$ (n' は奇数) として計算すると,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda-1}(2^{e+2}n') - (1+2^{\lambda-1})\sigma_{\lambda-1}(2^{e+1}n') &= \sigma_{\lambda-1}(n')\left(\sigma_{\lambda-1}(2^{e+2}) - (1+2^{\lambda-1})\sigma_{\lambda-1}(2^{e+1})\right) \\
&= \sigma_{\lambda-1}(n')\left(\frac{1-2^{(\lambda-1)(e+3)}}{1-2^{\lambda-1}} - (1+2^{\lambda-1})\frac{1-2^{(\lambda-1)(e+2)}}{1-2^{\lambda-1}}\right) \\
&= \sigma_{\lambda-1}(n')\frac{2^{(\lambda-1)(e+2)} - 2^{\lambda-1}}{1-2^{\lambda-1}} \\
&= -2^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}(n')\frac{1-2^{(\lambda-1)(e+1)}}{1-2^{\lambda-1}} \\
&= -2^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}(2^e n') \\
&= -2^{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}(n)
\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
G'_\lambda(z)|U_2 &= (1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(z) - 2^{\lambda-1}\sum_{n\geqq 0}\sigma_{\lambda-1}(n)q^{2n} \\
&= (1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(z) - 2^{\lambda-1}G'_\lambda(2z)
\end{aligned}$$

となる.

　また,

$$\begin{aligned}
G'_\lambda(z)\theta(z)|W_4 &= \sqrt{-2iz}^{-k}G'_\lambda\left(-\frac{1}{4z}\right)\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) \\
&= \left((-2iz)^{-\lambda}G'_\lambda\left(-\frac{1}{4z}\right)\right)\left(\sqrt{-2iz}^{-1}\theta\left(-\frac{1}{4z}\right)\right) \\
&= \left((-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^\lambda(4z)^{-\lambda}G'_\lambda\left(-\frac{1}{4z}\right)\right)\theta(z) \\
&= (-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^\lambda G'_\lambda(4z)\theta(z) \\
G'_\lambda(2z)\theta(z)|W_4 &= \sqrt{-2iz}^{-k}G'_\lambda\left(-\frac{1}{2z}\right)\theta\left(-\frac{1}{4z}\right) \\
&= \left((-2iz)^{-\lambda}G'_\lambda\left(-\frac{1}{2z}\right)\right)\left(\sqrt{-2iz}^{-1}\theta\left(-\frac{1}{4z}\right)\right) \\
&= \left((-1)^{\frac{\lambda}{2}}(2z)^{-\lambda}G'_\lambda\left(-\frac{1}{2z}\right)\right)\theta(z) \\
&= (-1)^{\frac{\lambda}{2}}G'_\lambda(2z)\theta(z)
\end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\begin{aligned}
G'_\lambda(2z)\theta(z)|(U_4W_4 - \alpha_2) &= \left((1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(z) - 2^{\lambda-1}G'_\lambda(2z)\right)\theta(z)|W_4 - \alpha_2 G'_\lambda(2z)\theta(z) \\
&= (-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^\lambda(1+2^{\lambda-1})G'_\lambda(4z)\theta(z) - (-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^{\lambda-1}G'_\lambda(2z)\theta(z) \\
&\quad + (-1)^{\frac{\lambda}{2}}2^{\lambda-1}G'_\lambda(2z)\theta(z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\lambda}(1+2^{\lambda-1}) G'_\lambda(4z)\theta(z) \\
G'_\lambda(4z)\theta(z)|(U_4W_4-\alpha_2) &= (\alpha_1-\alpha_2) G'_\lambda(4z)\theta(z) \\
&= (-1)^{\frac{\lambda}{2}} 3\cdot 2^{\lambda-1} G'_\lambda(4z)\theta(z)
\end{aligned}
$$

より,

$$
G^\infty_\lambda(z)|(U_4W_4-\alpha_2) = (-1)^{\frac{\lambda}{2}}(2^\lambda-1) G'_\lambda(4z)\theta(z)
$$

となる. よって

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\frac{\lambda}{2}}(2^\lambda-1)\langle f, G'_\lambda(4z)\theta(z)\rangle &= \langle f, G^\infty_\lambda(z)\theta(z)|(U_4W_4-\alpha_2)\rangle \\
&= \langle f|(U_4W_4-\alpha_2), G^\infty_\lambda(z)\theta(z)\rangle \\
&= \frac{3}{2}\alpha_1\langle f, G^\infty_\lambda(z)\theta(z)\rangle
\end{aligned}
$$

となる. 補題 6.6 より

$$
(-1)^{\frac{\lambda}{2}}(2^\lambda-1)\langle f, G'_\lambda(4z)\theta(z)\rangle = (-1)^{\frac{\lambda}{2}}\cdot 3\cdot 2^{\lambda-1}(1-2^{-\lambda})\cdot\frac{1}{6}\zeta(1-\lambda)\frac{\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{(4\pi)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\sum_{n\geqq 1}\frac{2a(n^2)}{n^{2\lambda-1}}
$$

となる. 定理 1.2(ii) のオイラー積表示より,

$$
\langle f, G'_\lambda(4z)\theta(z)\rangle = a(1)\frac{1}{4}\frac{\zeta(1-\lambda)}{\zeta(\lambda)}\frac{\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{(4\pi)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\prod_p\left(1-\lambda_p p^{-2\lambda+1}+p^{-2\lambda+1}\right)^{-1}
$$

となる. よって, $\langle f, G'_\lambda(4z)\theta(z)\rangle$ が 0 でないことと f の q 展開係数の 1 次の項が消えないことは同値である.

ここで $f_1,\cdots,f_r$ を $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の直交基底となる同時固有形式とし, $f_\nu=\sum_{n\geqq 1}a_\nu(n)q^n$ とする. ヘッケ代数が $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ に重複度 1 で作用することと, 内積が 0 にならないことから $G'_\lambda(4z)\theta(z)$ はヘッケ代数上の加群として $\mathbb{C}H_{\frac{k}{2}}\oplus(\oplus_{a_\nu(1)\neq 0}\mathbb{C}f_\nu)$ を生成する. さらに $\mathscr{S}^+_{1,k}$ の定義と $\sum_{n\geqq 1}a(n^2)n^{-s}$ のオイラー積から, $a_\nu(1)=0$ と $f_\nu|\mathscr{S}^+_{1,k}=0$ が同値であるとわかる. よって $G'_\lambda(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{1,k}=G'^2_\lambda(z)$ より $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))|\mathscr{S}^+_{1,k}$ が $S^0_{2\lambda}(\Gamma)$ に含まれることがわかる. これで定理 1.3 が示された. □

系 1.4 の証明. $\dim S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))=r,\ s=\begin{cases}2r\ (r\text{ は偶数})\\ 2r-1\ (r\text{ は奇数})\end{cases}$ とする. ここで,

$$
\psi_{\frac{k}{2}} = E_\lambda(4z)\theta(z) - H_{\frac{k}{2}}(z)
$$

とおくと, $\psi_{\frac{k}{2}}\in S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ である. ここで $\psi_{\frac{k}{2}}$ の q 展開の 1 次の項の係数は $2-\frac{\zeta(1-\lambda)}{\zeta(1-2\lambda)}$ となるので, $\lambda=4$ でなければ 0 にならない. このことと, $M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)), S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の次元公式から

$$
M^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) = \mathbb{C}H_{\frac{k}{2}}\oplus\mathbb{C}\psi_{\frac{k}{2}}\oplus\Delta(4z)M^+_{\frac{k}{2}-12}(\widetilde{\Gamma}_0(4)) \tag{6.15}
$$

となる. $H_{\frac{k}{2}}$ は定数項を持ち, $\psi_{\frac{k}{2}}$ は q 展開の 1 次の項で初めて 0 にならない係数を持ち, $\Delta(4z)$ は q 展開の 4 次の項で初めて 0 にならない係数を持つ. これを繰り返すことにより, $S^+_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の基底として,

$$\{e_i(z) \,|\, 1 \leqq i \leqq s, i \equiv 0, 1 \pmod 4\}$$

がとれる. ただし, $e_i(z) = \sum_{n \geqq 1} c_i(n) q^n$ とすると,

$$c_i(n) = 0\,(n < i), c_i(i) = 1$$

である. ここで, r 次正方行列 $(c_i(n))_{1 \leqq l, n \leqq s, l, n \equiv 0,1 \pmod 4}$ は上三角行列だから行基本変形をして左から $(\alpha_{i,n})_{1 \leqq i, n \leqq s, i, n \equiv 0,1 \pmod 4}$ をかけることによって, 単位行列にすることができる. 特にこの $(\alpha_{l,n})$ も上三角行列である. ここで $\{h_1(z), h_4(z), h_5(z), \cdots, h_s(z)\}$ を次のように定義する.

$$h_i(z) = \sum_{j \equiv 0,1 \pmod 4} \alpha_{i,j} e_j(z).$$

そこで $h_i(z) = \sum_{n \geqq 1} d_i(n) q^n$ とすると,

$$d_i(j) = \delta_{i,j}\,(0 \leqq i, j \leqq s)$$

となる. ここで, $\mu = \left[\sqrt{2r}\right]$ として $\{h_1, h_4, h_5, \cdots, h_s\}$ から添え字が平方数のもの $\mathscr{S}^+_{1,k}$ を作用させると

$$h_{k^2}(z)|\mathscr{S}^+_{1,k} = \sum_{n \geqq 1} \left(\sum_{e|n} e^{\lambda - 1} d_{k^2} \left(\frac{n^2}{e^2} \right) \right) q^n$$

となり, $h_{k^2}(z)|\mathscr{S}^+_{1,k}$ に 0 でない係数が最初に現れるのは $n = k^2$ 次の項である. よって,

$$h_1|\mathscr{S}^+_{1,k}, h_4|\mathscr{S}^+_{1,k}, \cdots, h_{\mu^2}|\mathscr{S}^+_{1,k}$$

は一次独立となる. $\mathscr{S}^+_{1,k}$ が単射となる次元 μ の $S_{2k}(\Gamma)$ の部分空間が存在する. □

6.3 定理 1.5 の証明

定理 1.5 の証明. $l = 6$ の場合のみ示す. $l = 8, 10$ のときは $S_{16}(\Gamma), S_{16}(\Gamma)$ の次元が 1 次元であることから, $l = 6$ と同様な計算で示される.

$Q = E_4(z), R = E_6(z)$ とする. q 展開係数を比べることにより,

$$G'_6(4z)\theta(z) = \frac{1}{691}\left(-65\zeta(-11)H_{\frac{13}{2}}(z) + 3A_{\frac{13}{2}}(z)\right) \tag{6.16}$$

となる. ただし,

$$A_{\frac{13}{2}} = (-\theta^5 + 2\theta F)\Delta_4 \in S_{\frac{13}{2}}(4)$$
$$\Delta_4 = F(\theta^4 - 16F)$$

である. ここで $A_{\frac{13}{2}} = \sum_{n\geqq 1} a(n)q^n$ とする. ここで $A_{\frac{13}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,13} \in S_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta$ となる. Δ の q 展開係数の 1 次の項の係数が 1 であることから, $A_{\frac{13}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,13} = a(D)\Delta$ となる.

さらに,

$$H_{\frac{13}{2}}|\mathscr{S}^+_{D,13} = \frac{L\left(-5,\left(\frac{D}{}\right)\right)}{\zeta(-11)}G_{12}$$

である. また [12, Zagier, pp.66-75] より,

$$G'_6(4z)\theta(z)|\mathscr{S}^+_{D,6} = G_{12}^{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}$$

であった.

$$\Delta = \frac{1}{1728}(Q^3 - R^2)$$
$$G'_{12} = \frac{1}{65520}(441Q^3 + 250R^2)$$

であることから, (6.16) に $\mathscr{S}^+_{D,13}$ を作用させると

$$G_{12}^{\mathbb{Q}(\sqrt{D})} = \alpha_D\frac{1}{24}Q^3 + \beta_D\frac{5}{504}R^2, \tag{6.17}$$
$$\alpha_D = \frac{-2^2\cdot 3^7\cdot 7L\left(-5,\left(\frac{D}{}\right)\right) + a(D)}{2^3\cdot 3\cdot 691},$$
$$\beta_D = \frac{-2^3\cdot 5^3L\left(-5,\left(\frac{D}{}\right)\right) - 7a(D)}{2^3\cdot 5\cdot 691}$$

となり, $\alpha_D, \beta_D \in \mathbb{Z}\,(D \neq 1, 5, 8, 13)$ を示さなければならない.

$G_{12}^{\mathbb{Q}(\sqrt{D})} - \frac{1}{4}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}(-5)$ が整数係数を持つことから (6.17) の q 展開係数の 1 次の項を計算すると,

$$\frac{1}{691}\left(\left(2\cdot 5^3 - 3^7\cdot 5\cdot 7\right)L\left(-5,\left(\frac{D}{}\right)\right) + 3a(D)\right)$$

となり, さらに D の仮定から [12, Zagier, pp.88-92] より $L\left(-5,\left(\frac{D}{}\right)\right)$ が偶数になることから, α_D, β_D の分母に 691 が現れないことがわかる. よって, $2^3\cdot 3\cdot 5|a(D)$ を示せばよい.

- $8|a(D)$ を示す.

  $\theta^4 = \left(1 + 2\sum q^{n^2}\right)^4 \equiv 1 \pmod 8$ より

  $$A_{\frac{13}{2}} \equiv -\theta F + 2\theta F^2 \pmod 8 \tag{6.18}$$

  となる. しかし,

  $$\theta F = -\frac{1}{2^6(1+i)}E^0_{\frac{5}{2}} \tag{6.19}$$

  と $E^0_{\frac{5}{2}}$ の q 展開係数の D 番目の係数 $\dot{e}_{\frac{5}{2}}(D)$ は [5, Koblitz, pp.188-192, Proposition 5] より

  $$\dot{e}_{\frac{5}{2}}(D) = (1+i)\cdot 2^3\left(1 - \left(\frac{D}{2}\right)2^{-2}\right)\left(1 - 2^{-4}\right)^{-1}\zeta(-3)^{-1}L\left(-1,\left(\frac{D}{}\right)\right)$$

であった. $\zeta(-3)=\frac{1}{120}$ であることから,

$$\dot{e}_{\frac{5}{2}}(D)=8(1+i)\left(4-\left(\frac{D}{2}\right)\right)L\left(-1,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$$

となる. [12, Zagier, pp.88-92] より $L\left(-1,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$ が偶数であることから, (6.19) で θF が 8 で割り切れることがわかる. 一方

$$\theta^5F+\theta F^2=\frac{17}{1+i}2^{-12}E^0_{\frac{9}{2}}$$

より,

$$\frac{17}{1+i}2^{-12}\dot{e}_{\frac{9}{2}}(D)=17\cdot 2^{-12}\cdot 2^7\left(1-2^{-8}\right)^{-1}\left(1-\left(\frac{D}{2}\right)2^{-4}\right)\zeta(-7)^{-1}L\left(-3,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$$

と $\zeta(-7)=\frac{1}{240}$ であることから,

$$\frac{17}{1+i}2^{-12}\dot{e}_{\frac{9}{2}}(D)=2^3\left(2^4-\left(\frac{D}{2}\right)\right)L\left(-3,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$$

となる. [12, Zagier, pp.88-92] より $L\left(-3,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$ が偶数であることから, $\theta^5F+\theta F^2$ の q 展開係数の D 番目の係数は 8 で割り切れることがわかる. $\theta^5F\equiv\theta F \pmod 8$ と θF の D 番目の係数が 8 で割り切れることから (6.18) より $8|a(D)$ がわかる.

- $3|a(D)$ を示す.

  $\theta^4+F\equiv 1 \pmod 3$ より $\Delta_4\equiv F(\theta^4-F)\equiv\theta^8-1 \pmod 3$ となる. よって,

$$\begin{aligned}A_{\frac{13}{2}}&=-\theta^5\Delta_4+2\theta F\Delta_4\equiv-\Delta_4\theta\equiv\theta-\theta^9\\&\equiv(1+2\sum_{n\geqq 1}q^{n^2})-(1+2\sum_{n\geqq 1}q^{9n^2}) \pmod 3\end{aligned}$$

  よって $3|a(D)$ となる.

- $5|a(D)$ を示す.

  (6.16) より

$$a(D)\equiv 2\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},D\geqq r^2\\ D\equiv r^2 \pmod 4}}\sigma_5\left(\frac{D-r^2}{4}\right)\equiv 2\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},D\geqq r^2\\ D\equiv r^2 \pmod 4}}\sigma_1\left(\frac{D-r^2}{4}\right) \pmod 5$$

  となる. ここで, [2, Cohen, Proposition4.3] より,

$$\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z},D\geqq r^2\\ D\equiv r^2 \pmod 4}}\sigma_1\left(\frac{D-r^2}{4}\right)=-5L\left(-1,\left(\frac{D}{-}\right)\right)$$

  となり, [12, Zagier, pp.88-92] より $L\left(-1,\left(\frac{D}{-}\right)\right)\in\mathbb{Z}$ より $5|a(D)$.

よって α_D,β_D は整数であるから, G^K_{12} は M^{HE}_{12} に含まれることが示された. □

参考文献

[1] A. O. L. Atkin and J. Lehner. Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. *Math. Ann.*, Vol. 185, pp. 134–160, 1970.

[2] H. Cohen. Formes modulaires à une et deux variables. pp. 1–10, 1977.

[3] P. Deligne. Formes modulaires et représentations l-adiques. In *Séminaire Bourbaki. 1968/69: Exposés 347–363*, Vol. 175 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 139–172. Springer, Berlin, 1971.

[4] Erich Hecke. *Mathematische werke*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.

[5] N. Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*. Springer, 1993.

[6] W. Kohnen. Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$. *Math. Ann.*, Vol. 248, No. 3, pp. 249–266, 1980.

[7] S. Lang. *Introduction to modular forms*. Springer-Verlag, 1976.

[8] S. Niwa. Modular forms of half integral weight and the integral of certain theta-functions. *Nagoya Math. J.*, Vol. 56, pp. 147–161, 1975.

[9] S. Niwa. On Shimura's trace formula. *Nagoya Math. J.*, Vol. 66, pp. 183–202, 1977.

[10] G. Shimura. On modular forms of half integral weight. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 97, pp. 440–481, 1973.

[11] H. P. F. Swinnerton-Dyer. On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. II. pp. 63–90. Lecture Notes in Math., Vol. 601, 1977.

[12] D. Zagier. On the values at negative integers of the zeta-function of a real quadratic field. *Enseignement Math. (2)*, Vol. 22, No. 1-2, pp. 55–95, 1976.

[13] D. Zagier. Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. pp. 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627, 1977.

[14] 黒川 信重, 栗原 将人, 斎藤 毅. 数論 2 岩澤理論と保型形式. 岩波書店, 2005.

[15] 土井 公二, 三宅 敏恒. 保型形式と整数論. 紀伊國屋書店, 1976.

[16] 雪江 明彦. 整数論 3 解析的整数論への誘い. 日本評論社, 2014.