$SL_2(\mathbb{Z})$の部分群の基本領域について

理学研究科数学系 M1 鈴川晋矢

平成 27 年 11 月 9 日

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の指数有限な部分群Γ' に対して, $\Gamma = \sqcup_{i=1}^{n} \alpha_i \Gamma'$ とコセット分解できるとき, Γ' の基本領域は $F' = \cup_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1} F$ となる. 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の任意の点 z が F' のある点と Γ' 同値であるのは参考文献 [1] に書かれている. ここでは F' の内点が他の F' の点と Γ' 同値にならないことの証明をする.

注意 Γ, 及びΓ' は ± 1 倍の違いを無視した $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}'$ として扱う.

まず F' のある領域 $\alpha^{-1} F$ での内点は, F' の他の点と $\bar{\Gamma}'$ 同値にならないことを示す (αは $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}'$ の代表元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のどれかとする). 内点を $\alpha^{-1} z_1$ (z_1は F の内点) とおき, これが F' の点 $\beta^{-1} z_2$ と $\bar{\Gamma}'$ 同値とする (β は $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}'$ の代表元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のどれか, $z_2 \in F$). つまり, ある $\gamma' \in \bar{\Gamma}'$ が存在して

$$\alpha^{-1} z_1 = \gamma' \beta^{-1} z_2$$

が成り立つとする. このとき $z_1 = \alpha \gamma' \beta^{-1} z_2$ となり, z_1 が F の内点であることから

$$\alpha \gamma' \beta^{-1} = I, \quad z_1 = z_2. \tag{1}$$

$\gamma' = \alpha^{-1} \beta \in \bar{\Gamma}'$ より, αとβ は同じ同値類に属するので $\alpha = \beta$. したがって考えていた 2 点は実は同じ点 $\alpha^{-1} z_1$ であることが言えた.

境界上の点は少し注意が必要になる. 異なる 2 つ以上の領域 $\alpha_i^{-1} F$ が境界を共有して, その境界が F' の内部となってしまう場合がある. その場合でも $\bar{\Gamma}'$ 同値な点は自分自身しかないことをいう.

代表元 α_i を並べ替えることで, 領域 $\alpha_1^{-1} F$ と$\alpha_2^{-1} F$ が境界を共有しているとしても一般性は損なわない. その境界上の点をひとつとり, その点を $\alpha_1^{-1} z_1 = \alpha_2^{-1} z_2$ とする ($z_1, z_2 \in F$). 先程と同じように, これが今 F' の点 $\beta^{-1} z_3$ と $\bar{\Gamma}'$ 同値であるとする (β は $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}'$の代表元のどれか, $z_3 \in F$).

つまりある $\gamma' \in \bar{\Gamma}'$ が存在して,

$$\alpha_1^{-1} z_1 = \alpha_2^{-1} z_2 = \gamma' \beta^{-1} z_3$$

が成り立つ. この式から $z_1, z_2, z_3 \in F$ はそれぞれ $\bar{\Gamma}$ 同値であり, F の点で $\bar{\Gamma}$ 同値である点は高々2 個なので

$$\text{(i) } z_1 = z_2, \quad \text{(ii) } z_1 = z_3, \quad \text{(iii) } z_2 = z_3$$

のどれかは成立する. また (ii) と (iii) は対称性から一方の場合さえ示せばよい.

- z_1 が楕円点でないとき

  (i) $\alpha_1^{-1}z_1 = \alpha_2^{-1}z_1$ から $z_1 = \alpha_1\alpha_2^{-1}z_1$ が言える. 安定化群を考えて $\alpha_1\alpha_2^{-1} = I$ から $\alpha_1 = \alpha_2$ となり, 領域が異なることに矛盾.

  (ii) $\alpha_1^{-1}z_1 = \gamma'\beta^{-1}z_1$ から $z_1 = \alpha_1\gamma'\beta^{-1}z_1$ が言える. 同様に安定化群を考えて $\alpha_1\gamma'\beta^{-1} = I$ から $\gamma' = \alpha_1^{-1}\beta \in \bar{\Gamma}'$ となり, α_1とβ の剰余類が同じなので $\alpha_1 = \beta$. 以上より $\alpha_1^{-1}z_1 = \beta^{-1}z_3$ となり, $\bar{\Gamma}'$同値 な点は自分自身しかないことが言えた.

- $z_1 = i$ のとき

  (i) $z_1 = \alpha_1\alpha_2^{-1}z_1$ から $\alpha_1\alpha_2^{-1} = I$ または S. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ より, $\alpha_1 = S\alpha_2$. また $z_1 = \alpha_1\gamma'\beta^{-1}z_3$ がいえて, $z_1 = i$, $\alpha_1\gamma'\beta^{-1} \in \bar{\Gamma}'$ なので $z_3 = i$.

  したがって$\alpha_1\gamma'\beta^{-1} = I$ または S,　つまり$\gamma' = \alpha_1^{-1}\beta$ または$\alpha_1^{-1}S\beta \in \bar{\Gamma}'$.

  これから β は α_1 か $S\alpha_1 (= S^2\alpha_2) = \alpha_2$ と同じ剰余類なのが分かる. つまり $\beta = \alpha_1$またはα_2. よって $\alpha_1^{-1}z_1 = \alpha_2^{-1}z_2 = \beta^{-1}z_3$ が成り立つ.

  (ii) この場合も $z_1 = z_2 = z_3 = i$ となり (i) と同様にしてできる.

  以上からこの場合も $\bar{\Gamma}'$ 同値な点は自分自身しかないことが分かる.

- $z_1 = \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ のとき
  この場合 $\alpha_1^{-1}\omega$ が F' の内点になっているのは, 図 1 からわかるように

  $$\alpha_1, S\alpha_1, T\alpha_1, ST\alpha_1, TST\alpha_1, (ST)^2\alpha_1$$

  が相異なる代表元になっているときである.

  $z_1 = \alpha_1\gamma'\beta^{-1}z_3$ より

  $$\alpha_1\gamma'\beta^{-1} = I,\ S,\ T^{-1},\ ST,\ (ST)^2,\ T^{-1}(TS)^2.$$

  これを γ' について解くことにより β と一致する代表元が求められる. 計算した結果が次ページの表 1 である. 表 1 からどの場合も $\beta^{-1}z_3 = \alpha_1^{-1}z_1$ となり, $\bar{\Gamma}'$ 同値な元は自分自身のみなのがわかる.

- $z_1 = -\bar{\omega}$ のときも上と同様にしてできる.

以上より, F' の内点と $\bar{\Gamma}'$ 同値な F' の点は自分自身のみであることが示された.

注意　今回 $\bar{\Gamma} = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ で示したことは, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ では成り立たないことに注意. 反例として $\Gamma' = \Gamma(3)$ の場合があり, 剰余類の代表元に I, $-T^3$ をとると領域 F と $(-T^3)^{-1}F$ の内点が $T^{\pm 3} \in \Gamma(3)$ で移りあうことができてしまう. これは Γ で考えたとき式 (1) は

$$\alpha\gamma'\beta^{-1} = \pm I$$

となり, 右辺が $-I$ のとき $\gamma' = (-\alpha)^{-1}\beta \in \Gamma'$ となるが, $(-\alpha)$ は代表元とは限らないので $\beta = (-\alpha)$ が成り立たないためである.

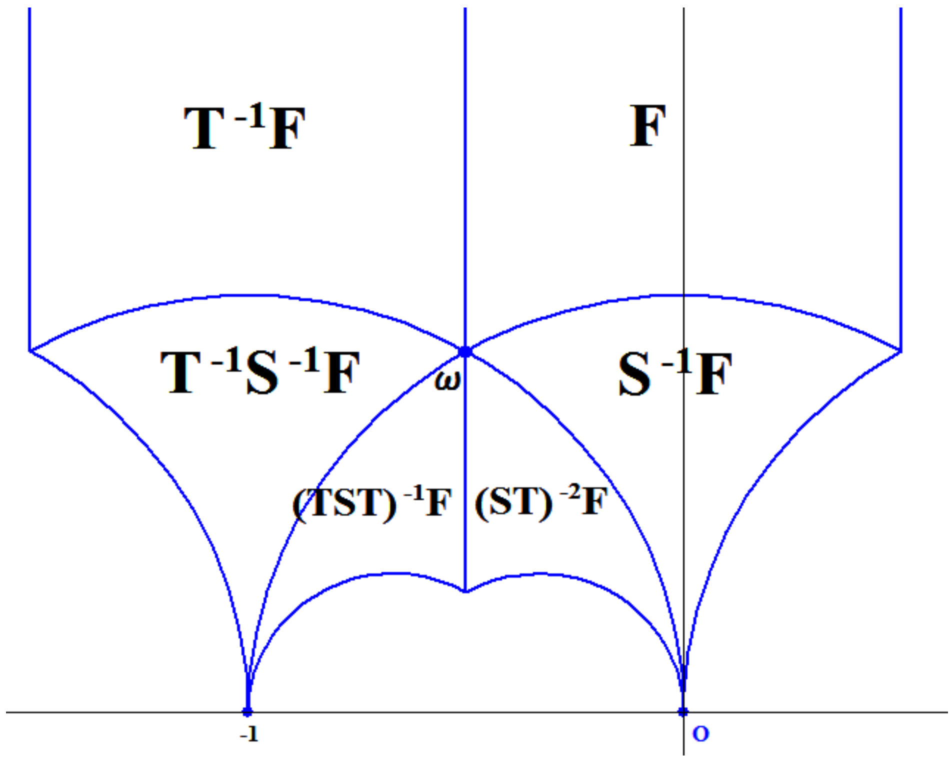

図 1: ω が内点となる場合

参考文献

[1] N.Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, *Springer*, 100–102, 105

表 1: $\beta^{-1}z_3$ の計算

γ' の値	β と一致する同値類	z_3 の値	$\beta^{-1}z_3$ の値
$\alpha_1^{-1}\beta$	α_1	ω	$\alpha_1^{-1}\omega$
$\alpha_1^{-1}S\beta$	$S\alpha_1$	$-\bar{\omega}$	$\alpha_1^{-1}\omega$
$\alpha_1^{-1}T^{-1}\beta$	$T\alpha_1$	$-\bar{\omega}$	$\alpha_1^{-1}\omega$
$\alpha_1^{-1}ST\beta$	$(ST)^2\alpha_1$	ω	$\alpha_1^{-1}\omega$
$\alpha_1^{-1}(ST)^2\beta$	$(ST)\alpha_1$	ω	$\alpha_1^{-1}\omega$
$\alpha_1^{-1}T^{-1}(TS)^2\beta$	$TST\alpha_1$	$-\bar{\omega}$	$\alpha_1^{-1}\omega$