線形代数学 A 期末試験 7 月 22 日 雪江明彦

問題 1.

(1) (5 点)

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とするとき，$\boldsymbol{wv}$ を求めよ．

(2) (5 点) 4×5 行列 A に左からかけると A の第 3 行の 2 倍が第 1 行から引かれる行列は何か?

(3) (5 点) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の符号を求めよ．

問題 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) (10 点) A の逆行列を求めよ．

(2) (5 点) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = -1, \\ x_2 - 2x_3 & = 3 \end{cases}$$

の解を求めよ．

問題 3. (15 点) 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 999 & 2998 & 1 & 0 \\ -1998 & -6001 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 1002 & 3003 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

問題 4. (15 点) $A = (a_{ij})$ は実数を成分とする 3 次正方行列，$a_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_{ij} < 0$ $(i \neq j)$ であり，$i = 1, 2, 3$ に対し $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} > 0$ とする．このとき，A は正則であることを証明せよ．

裏にも問題があります．

問題 5.

(1) (5点) $W = \{f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid e^x f''(x) + \sin(x^2) f'(x) + f(x) = 0\} \subset V = C^\infty(\mathbb{R})$ は部分空間か?

(2) (5点) $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{[1,2]\}$ とするとき，W は $V = \mathbb{R}^2$ の部分空間か?

問題 6. (15点)

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする．W_1, W_2 をそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\}$ で張られた $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする．$W_1 \cap W_2$ の元を全て求めよ．

問題 7. (15点) $W = C^\infty(\mathbb{R})$, V を W から W への線形写像全体の集合に線形写像としての和とスカラー倍を考えたベクトル空間とする．

$$\begin{aligned} T_1(f)(x) &= f'(x), \\ T_2(f)(x) &= f''(x), \\ T_3(f)(x) &= \int_0^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

とすると $T_1, T_2, T_3 \in V$ である．$S = \{T_1, T_2, T_3\}$ は1次独立か?