線形代数学 A 期末試験 解答例 雪江明彦

問題 1. (1)

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1 つの実数にしてしまうのはよくある間違い.

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & & -2 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\ell(\sigma) = 6$, $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

問題 2. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $({}^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ なので,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, $[x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{5}[-8, 9, 3]$ である.

問題 3. 第 3 列を第 1 列から引き，第 3 列の 3 倍をを第 2 列から引くと，

$$\det\begin{pmatrix} 999 & 2998 & 1 & 0 \\ -1998 & -6001 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 1002 & 3003 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= 60 + 30 - (-100) - 9 = 181.$$

問題 4. もし A が正則でなければ，$Ax = 0$ となる $x = [x_1, x_2, x_3] \neq 0$ がある．$|x_1|, |x_2|, |x_3|$ の最大値が $|x_i|$ であるとする．$x \neq 0$ なので，$x_i \neq 0$ である．$i = 1$ なら，

$$a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3$$

なので，

$$|a_{11}x_1| = |-a_{12}x_2 - a_{13}x_3| \leqq |-a_{12}|\,|x_2| + |-a_{13}|\,|x_3|.$$

$a_{11} > 0, a_{12}, a_{13} < 0$ なので，$|a_{11}x_1| = a_{11}|x_1|$．また，

$$|-a_{12}|\,|x_2| + |-a_{13}|\,|x_3| \leqq |-a_{12}|\,|x_1| + |-a_{13}|\,|x_1| = |x_1|(-a_{12} - a_{13}).$$

したがって，

$$a_{11}|x_1| < (-a_{12} - a_{13})|x_1|.$$

すると，

$$0 < |x_1|(a_{11} + a_{12} + a_{13}) < 0$$

となり矛盾である．

$i = 2, 3$ でも同様である．

この方法なら $n \times n$ 行列の場合にも適用できます．

問題 5. (1)

$$D = e^x \frac{d^2}{dx^2} + \sin(x^2)\frac{d}{dx} + 1$$

とおくと，$W = \mathrm{Ker}(D)$．よって，W は部分空間である．

(2) $\boldsymbol{v} = (1/2)[1, 2]$ とすると，$\boldsymbol{v} \neq [1, 2]$ なので，$\boldsymbol{v} \in W$．しかし $2\boldsymbol{v} = [1, 2] \notin W$ なので，W はスカラー倍で閉じていない．よって，W は部分空間ではない．

問題 6. $W_1 \cap W_2$ の元は $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ により $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = x_4\boldsymbol{v}_4 + x_5\boldsymbol{v}_5$ と書ける．これは $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 - x_4\boldsymbol{v}_4 - x_5\boldsymbol{v}_5 = 0$ と同値なので，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_5]$$

とおくと，上の条件は $A\boldsymbol{x} = 0$ と解釈できる．

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

したがって，上の解は

$$x_1 = -2x_2 + 3x_5,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2x_5$$

で x_2, x_5 は任意である．よって，$W_1 \cap W_2$ の任意の元は

$$(-2x_2 + 3x_5)\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = 3x_5\boldsymbol{v}_1$$

という形をしている．なお，

$$x_4\boldsymbol{v}_4 + x_5\boldsymbol{v}_5 = x_5(2\boldsymbol{v}_4 + \boldsymbol{v}_5) = 3x_5\boldsymbol{v}_1$$

でも同じである．したがって，

$$W_1 \cap W_2 = \{x\boldsymbol{v}_1 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

W_1, W_2 はたまたま平面なので，それらに直交するベクトルを求め，さらにそれらに直交する直線を求めるというのはこの場合間違いではないが，一般的に適用できる方法ではなく，あまり自然な解法とはいえない．

問題 7. $aT_1 + bT_2 + cT_3 = 0$ とする．$f(x) = 1$ とすれば，$T_1(f) = T_2(f) = 0$, $T_3(f) = x$ なので，$cx = 0$. よって，$c = 0$.

$f(x) = x$ とすると，$T_1(f) = 1$, $T_2(f) = 0$. よって，$a = 0$.

$f(x) = x^2$ とすると，$T_2(f) = 2x$. よって，$b = 0$. したがって，$\{T_1, T_2, T_3\}$ は 1 次独立である．

なお，特別な関数 $f(x)$ に対して $aT_1(f) + bT_2(f) + cT_3(f) = 0$ となったとしても，$aT_1 + bT_2 + cT_3 = 0$ であるとは限らない．この条件は**全ての** $f(x)$ に対して $aT_1(f) + bT_2(f) + cT_3(f) = 0$ となることである．