2変数3-tensorsの整同値類について

小林優司

2003年 2月 18日

目次

1 序文

本論文は，Anthony C.Kable が著した “Classes of integral 3-tensors on 2-space” ([1], 2000 年) という論文についての総合報告である．この論文では群 $\mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ の標準的な作用のもとで，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ という空間の軌道の個数を求める問題を扱っている．この表現空間 $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ を整 3-tensor の空間と呼ぶ．

本論文では，まず始めに概均質ベクトル空間を定義する．概均質ベクトル空間は，相対不変式とよばれる式を持った表現空間であり 1960 年代の前半に佐藤幹夫によって初めて導入された．よく知られている結果の一つとして分類に関する理論がある．標数 0 の代数閉体上の既約で正則な概均質ベクトル空間は佐藤幹夫と木村達雄の論文 [4] によって 29 個の類に分類できることが証明された．

本論では，正則性や同値性の定義について述べないが 29 種類の中の１つの例として群 $\mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$ から２変数２次形式の空間へ作用する表現を考える．その後，この空間を利用して群 $G = \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ の表現 $V = \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2$ の元に対して判別式を定義する．Aff^2 は２次元のアフィン空間である．この表現空間 (G, V) はちょうど整 3-tensor の空間を拡張した形となっている．

次に 3-tensor と呼ばれる V の元を３つの２変数２次形式に対応させる．この対応により整 3-tensor の類が２変数２次形式の類を用いて表すことができるが，これには両方の判別式が等しいことと原始的であるという条件が必要になる．原始的な整２変数２次形式とその判別式については 3 節で，原始的な 3-tensor については 4 節でそれぞれ定義することにする．

本論では２つの主定理を示すこととする．F_D^* を判別式 D 原始的な整２変数２次形式の類全体の集合とおく．F_D^* は有限集合であることが知られている．$h(D)$ を F_D^* の類の個数とする．次は１つ目の主定理である．

定理 1.1 判別式 D の原始的な整 3-tensor の類の個数は $D > 0$ のとき $h(D)^2$ となり，$D < 0$ のとき $4h(D)^2$ となる．

証明については，5 節の定理 5.17 で示す．Gauss は [6] で２変数２次形式の理論を作り上げ２次体の類数に関する深い仕事をしたのは有名である．本論では，3 節において Gauss の定理について取り上げて説明をする．これは２次体の狭義のイデアル類が２変数２次形式の類と対応するというものであるが，この定理を利用すると２次体の類数を求めることができる．ただし判別式などによって細かい条件が必要になる．このような理論は，Gauss の簡約理論とよばれる．

次に，２変数２次形式の類の合成 (composition) を 7 節で定義する．そして合成によって積と定義している．ただ合成の定義だけ見ても非常に分かりづらい．少しでも見通しを良くするために２次体の order と関連付ける．6 節で説明するが，判別式 D の２変数２次形式の類全体の集合とある２次体の order における加群の類全体の集合は (集合として) １対１に対応する．実は，加群の類には積が定義されているから積を含めて対応するように２変数２次形式の類の積を決めているのである．類の合成を考えることで F_D^* に有限アーベル群の構造が与えられる．次は２つ目の主定理である．

定理 1.2 対称な 3-tensor を含む判別式 D の原始的な整 3-tensor の類の個数は，３乗して１となるような F_D^* の類の個数に等しい．

この定理の証明は 7 節の定理 7.16 で行う．最後に２変数２次形式の類の積について述べる．２変数２次形式の類の積は，定め方から構造上複雑なものになってしまうが 3-tensor と関連付けると容易に計算できる．3-tensor を通して２変数２次形式の類の積を考える方が簡単で実用的である．その点で１つ目の主定理の証明で用いられる対応が重要になる．

最後に本論文を書くにあたって，多忙ななかご指導いただいた雪江明彦先生，整数論セミナーでお世話になった森田康夫先生に深く感謝いたします．

2　概均質ベクトル空間

この節では，概均質ベクトル空間について述べる．概均質ベクトル空間は，相対不変式とよばれる式を持った表現空間であり 1960 年代の前半に佐藤幹夫によって初めて導入された．佐藤幹夫と木村達雄の論文 [4] によって標数 0 の代数閉体上の既約で正則な概均質ベクトル空間は 29 個の類に分類できることが証明されている．本論ではこのことには触れないが，２変数２次形式の空間を例として挙げることにする．

概均質ベクトル空間を定義する前に，いくつかの準備をする．

定義 2.1 A を 1 を含む可換環，X を A 上の代数多様体とするとき X の A-有理点の集合を X_A とかく．

k を任意の体とする．G, V をそれぞれ k 上の代数群，代数多様体とする．

定義 2.2 T を代数群とする．ある正の整数 n が存在して $\bar{k}$ 上で T と $\mathrm{GL}(1)^n$ が同形となるとき T はトーラスであると定義する．

定義 2.3 G を代数群とする．G から $\mathrm{GL}(1)$ への準同形写像を G の指標と定義する．G の指標全体の集合を $X^*(G)$ により表すことにする．このとき $X^*(G)$ は $\mathrm{GL}(1)$ の積により群をなす．そこで指標 $\phi \in X^*(G)$ が他の指標の巾でかけないとき，すなわち

$$\phi = \psi^m \ (\psi \in X^*(G), m \in \mathbb{Z}) \quad \text{ならば} \quad m = \pm 1$$

であるとき ϕ は原始的な指標であると定義する．

いまから代数群の簡約性や半単純性について簡単に説明する．詳しい定義については ([2], p27-28) にある．

定義 2.4 k を代数閉体，G を k 上の代数群とする．

(1) G の極大連結可解閉部分群を Borel 部分群と定義する．G の Borel 部分群全体の集合を $\mathscr{B}$ とおく．

(2) G の根其 $R(G)$ を $R(G) = (\cap_{B\in\mathscr{B}} B)^\circ$ により定義する．いま G° は G の単位元を含む連結成分 (identity component) を表すものとする．

(3) $R(G) = \{e\}$ となるとき G は半単純群，$(R(G))_u = \{e\}$ となるとき G は簡約群であると定義する．ただし G_u は G の巾単元，即ち

$$G_u = \{a \in G \ \mid \ (a-e)^n = 0, \ \exists n \in \mathbb{Z}, \ e \text{ は単位元}\}$$

を表すものとする．

上の定義により代数閉体上の代数群に対して簡約と半単純を定義した．これは任意の体 k 上でも定義できる．G を k 上任意の代数群としたとき $G^\circ \times_k \bar{k}$ が簡約群 (半単純群) であるときに G も簡約群 (半単純群) と定義する．

いま簡約群と半単純群の例を挙げる．

例 2.5

(1) $\mathrm{GL}(n)$ は簡約群である．

(2) $\mathrm{SL}(n), \mathrm{Sp}(2n), \mathrm{SO}(2n)(n \geq 2), \mathrm{SO}(2n+1)(n \geq 1)$ などは半単純群である．

(3) 簡約でない例として

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathrm{Aff} \right\}$$

とおくと，G は簡約群とはならない．

今から概均質ベクトル空間を定義する．k を任意の体，G を k 上の代数群とする．

定義 2.6 G を連結な簡約群，V を G の表現，χ を G の自明でない原始指標とし，これらがすべて k 上で定義されているものとする．次の条件を満たすとき (G, V, χ) は概均質ベクトル空間という．

(1) Zariski 開軌道がただ 1 つ存在する．即ち，開集合 $U \subset V$ に対し $U_{\bar{k}} = G_{\bar{k}} x$ となる $x \in U_{\bar{k}}$ が存在する．

(2) ある定数でない多項式 $\Delta(x) \in k[V]$ と $a \in \mathbb{Z}$ が存在して $\Delta(gx) = \chi(g)^a \Delta(x)$ となる．

(2) の多項式 $\Delta(x)$ を相対不変式とよぶ．

概均質ベクトル空間を扱う上で，よく V を既約表現として考える場合が多い．しかし k の標数が $p > 0$ のときには，p を法とする被約で既約な表現によって得られる既約な表現を考えなければならないときがある．これらの表現は，既約表現として同じ方法で多少扱うことができる．そのために次のような条件を考える．

Z を G の中心の identity component とする．G は簡約群なので Z はトーラスとなる．

条件 2.7 $t \in Z$ のとき $tv = \psi(t)v \quad (\forall v \in V)$ となる $\psi \in X^*(Z)$ が存在する．

概均質ベクトル空間 (G, V, χ) が上の条件をみたすならば，χ の選び方は本質的には一意的であることを示す．

命題 2.8 条件 2.7 を満たす G の表現を V とする．もし χ_1, χ_2 が G の原始的な指標で，$(G, V, \chi_1), (G, V, \chi_2)$ が概均質ベクトル空間ならば $\chi_1 = \chi_2$ である．

証明　$\bar{k} = k$ としてもよい．G の交換子群 (G, G) を G_1 とおく．仮定より G_1 は連結な半単純群で自明でない指標を持たない．

このとき $T \subset \mathrm{Z(G)}$ かつ $G = TG_1$ となる G のトーラス T がある．

条件 (2.7) より $tv = \psi(t)v \quad (\forall t \in T, v \in V)$ をみたす T の指標 ψ が存在する．

$\Delta_1(x), \Delta_2(x) \in k[V]$ とすると

$$\Delta_1(gx) = \chi_1(g)^a \Delta_1(x), \Delta_2(gx) = \chi_2(g)^b \Delta_2(x)$$

$g = tg_1 (t \in T, g_1 \in G_1)$ とかくことにすれば

$$\begin{aligned}\Delta_1(gx) &= \chi_1(g)^a \Delta_1(x) = \chi_1(t)^a \Delta_1(x) \\ &= \Delta_1(tx) = \Delta_1(\psi(t)x) = \psi(t)^{\deg \Delta_1} \Delta_1(x)\end{aligned}$$

よって $\chi_1(tg_1)^a = \psi(t)^{\deg \Delta_1}$ となる．同様に $\chi_2(tg_1)^b = \psi(t)^{\deg \Delta_2}$ も得られるので
$\chi_1(tg_1)^{a \deg \Delta_2} = \chi_2(tg_1)^{b \deg \Delta_1}$
χ_1, χ_2 はともに原始指標なので $\chi_1 = \chi_2$ となる．□

命題 2.8 により (G, V, χ) が条件 2.7 を満たせば χ は本質的に一意に定まる．そこで (G, V) と略記することにする．

いまから相対不変式の性質を述べる．相対不変式は概均質ベクトル空間において重要なものである．あとで概均質ベクトル空間の例として述べるが 2 変数 2 次形式の空間の判別式は，相対不変式である．

補題 2.9 Δ_1, Δ_2 が相対不変式のとき $\Delta_1(x)^a / \Delta_2(x)^b$ が定数となるような正の整数 a, b が存在する．

証明　定義から，ある整数 a, b が存在して

$$\Delta_1(gx) = \chi_1(g)^b \Delta_1(x), \quad \Delta_2(gx) = \chi_2(g)^a \Delta_2(x)$$

となる．このとき $\Delta_1(x)^a / \Delta_2(x)^b$ は G の作用に関して不変である．V は，G-開軌道を持つので $\Delta_1(x)^a / \Delta_2(x)^b$ は定数となる．□

上の補題から相対不変式は斉次多項式であることが導ける．

命題 2.10 相対不変式は，斉次多項式である．

証明　$\Delta(x)$ を相対不変式とする．このとき任意の $g \in G$ に対して $\Delta(gx) = \chi(g)^a \Delta(x)$ $(a \in \mathbb{Z})$ となる．$t \in \mathrm{GL}(1)$ とおく．$\Delta(tgx) = \Delta(gtx) = \chi(g)^a \Delta(tx)$ であるから $\Delta_1(x) = \Delta(x),\ \Delta_2(x) = \Delta(tx)$ として二つの相対不変式をとったと考えると補題 2.9 の証明により $\Delta(tx)/\Delta(x)$ は (t に依存した) 定数となる．そこで $\Delta(tx) = c(t)\Delta(x)$ $(c(t) \in \mathrm{GL}(1))$ とおくと，明らかに c は $\mathrm{GL}(1)$ の指標である．したがって $c(t) = t^N$ となる正の整数 N が存在する．$\Delta(x)$ は定数でない多項式だから $N > 0$ となる．よって $\Delta(x)$ は斉次多項式である．□

上の命題により相対不変式は，斉次多項式であるから次数が定義できる．次の命題は次数が最小となるような相対不変式が存在することを示している．

命題 2.11 R を相対不変式で生成される $k[V]$ の部分環とする．このとき，R は 1 つの元で生成される．さらに $R = k[\Delta]$ のとき，Δ は $\bar{k}$ 上対応する環を生成する．

証明　$k[V]$ が UFD であることに注意する．$\deg \Delta(x)$ が最小となるような相対不変式 $\Delta(x)$ をとる．$\Delta(x)$ の素元分解を

$$\Delta(x) = cP_1(x)^{p_1} P_2(x)^{p_2} \cdots P_i(x)^{p_i} \qquad (c \in k^\times,\ p_i \in \mathbb{Z},\ P_i(x) \text{ は多項式})$$

によって表す．一方，$\Delta_1(x)$ をもう１つの相対不変式とすると素元分解の一意性より $\Delta_1(x)$ は

$$\Delta_1(x) = c' P_1(x)^{q_1} P_2(x)^{q_2} \cdots P_i(x)^{q_i}$$

の形をしなければならない.（ただし ${}^t(p_1, \cdots, p_i), {}^t(q_1, \cdots, q_i)$ は比例する）

互いに素な整数 $r_1, \cdots, r_i$ に対して

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \end{pmatrix} \quad (s_1, s_2 \in \mathbb{Z},\ s_1, s_2 \geq 0)$$

仮定より $s_2 \geq s_1$．$s_1 \mid s_2$ のとき $\Delta_1(x) \in k[\Delta]$ となるから s_1 は s_2 を割らないと仮定する．このとき $s_2 = \alpha s_1 + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \beta < s_1)$.

$\Delta_1(x)\Delta(x)^{-\alpha}$ は相対不変式で次数は s_1 以下となるがこれは矛盾である．よって R は $\Delta(x)$ で生成される.

後半の証明は省略する．証明は ([2], p50) の補題 10.5，命題 10.9 にある．□

いまから相対不変式の性質を少し述べる．$V^{\mathrm{ss}} = \{\ x \in V \mid \Delta(x) \neq 0\ \}$ と定め，semi-stable point の集合とよぶ．命題 2.11 により V^{ss} は Δ の選び方に依らずに定まる.

k を任意の体，k^{sep} を k の分離閉包とおく．(G, V) を条件 2.7 をみたす概均質ベクトル空間とする．一般に $V^{\mathrm{ss}}_{k^{\mathrm{sep}}}$ の $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道は一つではない．しかし，(G, V) は正則という条件をみたせば $V^{\mathrm{ss}}_{k^{\mathrm{sep}}}$ はただ一つの $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道をもつ．正則性についての説明はしないが，木村の両氏によって導かれた正則性の概念は [2] に載っている．次の命題の仮定は，([4],p72)Proposition 25 で表されているように正則性と同値なものである.

命題 2.12 G を連結な簡約群，V を条件 2.7 を満たす G の表現を V とする.

もし，$U = Gw$ が Zariski open で G_w が簡約 (群スキームとして smooth) となるような点 $w \in V_k$ が存在するならば次を満たす.

(1) U は affine

(2) $U_{k^{\mathrm{sep}}}$ はただ１つの $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道

(G, V) が，この命題の仮定をみたせば相対不変式が存在し概均質ベクトル空間になるのである．この事と，$V^{\mathrm{ss}}_{k^{\mathrm{sep}}}$ がただ一つの $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道を持つことについての証明は ([2],p53) の Cor 10.17 にある.

実在する例に対して命題 2.12 の仮定をみたしていることを確かめることは，概均質ベクトル空間であることを示す上で重要である．その点で，次の命題は大変便利である.

命題 2.13

$$\dim T(G_w)_e = \dim G - \dim V$$

となるような点 $w \in V$ が存在するならば，Gw は V の開集合，さらに G_w は k 上 smooth となる.

ただし，$T(G_w)_e$ は G_w の単位元 e における G_w の接空間を表す．この命題の証明は([2],p54) の Proposition 10.20 にある．

概均質ベクトル空間の説明は，ここまでにして次に 2 変数 2 次形式の空間を例として挙げることにする．$G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$ を群として 2 変数 2 次形式の空間を考える．

定義 2.14 Aff^2 を 2 次元アフィン空間とし，$G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2),\ V = \mathrm{Sym}^2\mathrm{Aff}^2$ とおくことにする．このとき V を 2 変数 $v = (v_1, v_2)$ の 2 次形式の空間とみなすことによって表現空間 (G, V) を定義する．また V の元 x を

$$x = x(v) = x(v_1, v_2) = x_0v_1^2 + x_1v_1v_2 + x_2v_2^2$$

によって表すことにする．

次に 2 次形式の空間の作用を定義する．その際に，変数 v を行ベクトルとみなして定義する．

定義 2.15 G 上 V の作用を

$$(t, g_1)x(v) = tx(vg_1), \qquad g = (t, g_1) \in G,\ x(v) \in V$$

により定める．

いまから命題 2.12 と命題 2.13 を使って 2 変数 2 次形式の空間が概均質ベクトル空間であることを示す．そこで一般の点として w を $w = w(v) = v_1v_2 \in V$ とおくことにする．

命題 2.16 (G, V) は概均質ベクトル空間である．さらに $G_w^\circ \cong \mathrm{GL}(1)^2$ となる．

証明　(G, v) が概均質ベクトル空間であることをいうために，命題2.13 の式 $\dim T(G_w)_e = \dim G - \dim V$ が成り立つことを示せば十分である．いま $G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2), V = \mathrm{Sym}^2\mathrm{Aff}^2$ であるから $\dim G = 5,\ \dim V = 3$ となる．次に接空間 $T(G_w)_e$ を求める．そのために

$$\left(1 + \epsilon t,\ I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

の作用を考える．ただし $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ は dual number の環である．変数 v は $(v_1 + \epsilon(av_1 + cv_2), v_2 + \epsilon(bv_1 + dv_2))$ と変わるから，上の元を $w(v)$ に作用させると

$$\begin{aligned} w(v) \longrightarrow\ & \epsilon tw(v) + w(v_1 + \epsilon(av_1 + cv_2), v_2 + \epsilon(bv_1 + dv_2)) \\ & = w(v) + \epsilon(bv_1^2 + (t + a + d)v_1v_2 + cv_2^2) \end{aligned}$$

となる．作用した後も $w(v)$ になるためには，$b = c = 0, t = -(a + d)$ でなければならない．したがって $T(G_w)_e$ は

$$\left(-(a + d),\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)$$

の形の元からなる．よって $\dim T(G_w)_e = 2$ となり $\dim T(G_w)_e = \dim G - \dim V$ が成り立つことが示された．

次に $G_w^\circ \cong \mathrm{GL}(1)^2$ を示す．

$$H = \left\{ \left((t_1t_2)^{-1},\ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathrm{GL}(1) \right\}$$

とおくと，明らかに $H \cong \mathrm{GL}(1)^2$ で $H \subset G_w$ となる．いま $\dim G_w = 2$ であるから $G_w^\circ = H$ が得られる．□

上の命題により (G, V) が概均質ベクトル空間であることが示されたから相対不変式が存在する．$x(v)$ の判別式を $\Delta(x) = x_1^2 - 4x_0x_2$ とする．このとき直接計算することによって

$$\Delta((t, g_1)x) = \chi(t, g_1)\Delta(x), \quad \chi(t, g_1) = t^2(\det g_1)^2 \tag{2.17}$$

を満たしていることが確かめられる．このことからわかるように判別式 $\Delta(x)$ が相対不変式になっているのである．標数が 2 でないなら $\Delta(x)$ は既約である．

3　２次形式の類と２次体のイデアル類群

この節では，２変数２次形式の類の個数から２次体のイデアル類群の位数を求めることについての説明をする．これは Gauss によって初めて考えられたもので簡約理論と呼ばれている．簡約理論を説明する前に，まず２変数２次形式の類と類数を定義する．

定義 3.1 ２変数２次形式 $f(u,v)=au^2+buv+cv^2$ が整数係数 $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ であるとき整２変数２次形式と呼ぶことにする．f の判別式 D を $D=b^2-4ac$ によって定義する．さらに $\gcd(a,b,c)=1$ ならば，$f(u,v)$ を原始的な整２変数２次形式と呼ぶことにする．

GL(2) から２変数２次形式 $f(u,v)$ への作用に関しては，(u,v) を行ベクトルとみなして

$$g\cdot f(u,v)=f((u,v)g)\quad(g\in\mathrm{GL}(2))$$

により定義する．

次で定義するように整２変数２次形式の類といった場合は，SL(2)-軌道の類を表すこととする．

定義 3.2 F_1,F_2 を原始的な整２変数２次形式とする．F_1 にある $\mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ の元を作用させると F_2 になるとき，F_1 と F_2 は $\mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$-同値であるといい $F_1\sim F_2$ とかく．また，F_1 の同値類を $[F_1]$ によって表す．

定義 3.3 判別式が D （D は整数）となるような原始的な整２変数２次形式の集合を $F_{\mathrm{prim},D}$ とおくことにする．

同値類の集合 F_D^* を次のように定める．

$D>0$ のとき $F_D^*=\{[F]\mid F\in F_{\mathrm{prim},D}\ \}$

$D<0$ のとき $F_D^*=\{[F]\mid F\in F_{\mathrm{prim},D},\quad F$ は正値$\}$ と定める．

注 3.4 F_D^* は有限集合であることが知られている．$h(D)=\#F_D^*$ とおく．

F_D^* の有限性についての証明は [7],[8] に載っている．

$d\neq 1$ を２乗の因子を含まない整数，$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする．このとき $\mathcal{O}_K$ は

$$\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\omega],\quad \omega=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{d}}{2} & (d\equiv 1 \mod 4\text{ のとき})\\ \sqrt{d} & (d\equiv 2\text{ または }3 \mod 4\text{ のとき})\end{cases}$$

として表せる．また K の判別式 D_K は

$$D_K=\begin{cases}d & (d\equiv 1 \mod 4\text{ のとき})\\ 4d & (d\equiv 2\text{ または }3 \mod 4\text{ のとき})\end{cases}$$

で与えられる．いまから２次体のイデアル類，および類数の定義をする．イデアル類には積が定義できるから整数環のイデアル類全体の集合は群をなす．イデアル類を狭義と広義で区別するのは，実２次体においてイデアル類群と狭義のイデアル類群が異なるためである．

定義 3.5 K の分数イデアル全体を $\mathcal{J}_K$ とおく．$\mathcal{J}_K$ はイデアルの乗法に関して群となる．K の元 $\alpha(\neq 0)$ で生成される単項イデアル (α) の全体を $\mathcal{P}_K$ とおく．このとき $\mathcal{P}_K$ は $\mathcal{J}_K$ の部分群となる．$\mathcal{J}_K$ の $\mathcal{P}_K$ に関する剰余類 $\mathfrak{a}\mathcal{P}_K$ $(\mathfrak{a} \in \mathcal{J}_K)$ を K のイデアル類といい，イデアル類の全体 $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{P}_K$ の乗法群を K のイデアル類群という．$\mathcal{C}_K$ の位数を K の類数といい h_K とかく．また $\mathcal{P}_K$ の部分群 $\mathcal{P}_K^+$ を

$$\mathcal{P}_K^+ = \{(\alpha) \in \mathcal{P}_K \mid \alpha \in k,\ \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\alpha > 0\}$$

により定める．ただし $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}$ はノルムを表す．$\mathcal{P}_K^+$ を法とする $\mathcal{J}_K$ の剰余類を狭義のイデアル類という．$\mathcal{C}_K^+ = \mathcal{J}_K/\mathcal{P}_K^+$ を狭義のイデアル類群，$\mathcal{C}_K^+$ の位数を K の狭義のイデアル類数といい，h_K^+ とかくことにする．

次の命題は，狭義のイデアル類群 $\mathcal{C}_K^+$ と広義のイデアル類群 $\mathcal{C}_K$ の違いを表すものである．証明は，([8], p181-182) に載っている．

命題 3.6 (1) K が虚２次体ならば $\mathcal{P}_K^+ = \mathcal{P}_K,\ h_K^+ = h_K$

(2) K が実２次体のとき１より大きい最小の単数 ϵ_0 に対して $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\epsilon_0 = -1$ ならば $\mathcal{P}_K^+ = \mathcal{P}_K,\ h_K^+ = h_K$ となり，$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\epsilon_0 = 1$ ならば $\mathcal{P}_K^+$ は $\mathcal{P}_K$ の指数２の部分群で $h_K^+ = 2h_K$ となる．

いま，整数環の整イデアルから２変数２次形式への対応を考える．

I_K を $\mathcal{O}_K$ の０でない整イデアルの集合とする．I_K と $F_{\mathrm{prim},D}$ の間に次の対応を考える．もし $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$ が I_K の元なら $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ と置く．２元２次形式 $f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ を

$$f_{\mathfrak{a}}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = \mathcal{N}(\mathfrak{a})^{-1}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$$

で定義すると $f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ は $F_{\mathrm{prim},D}$ の元になる．

$$f_{\mathfrak{a}}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a(x + \theta_{\mathfrak{a}}y)(x + \overline{\theta_{\mathfrak{a}}}y)$$

とすれば $f_{\mathfrak{a}}(-\theta_{\mathfrak{a}}, 1) = 0$ となるが

$$\theta_{\mathfrak{a}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \theta_{\mathfrak{a}} = \frac{b + \sqrt{D_K}}{2a}$$

となるように $\mathfrak{a}$ の α_1, α_2 を選ぶことができる．

次の定理は非常に有名である．

定理 3.7 (Gauss) 対応 $\mathfrak{a} \to f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ により K の狭義のイデアル類は F_{prim, D_K} の同値類と 1 対 1 に対応する．ただし，$D_K < 0$ のとき $a > 0$ とする．

特に K の狭義のイデアル類数 h_K^+ と，判別式 D_K をもつ原始的な整 2 変数 2 次形式の類数 $h(D_K)$ は一致する．

注 3.8 ここでは，ある 2 次体 K を 1 つ定めて固定し，整数環のイデアル類を判別式 D_K の 2 次形式の類（$F_{D_K}^*$ の元）へ対応させた．しかし，原始的な整 2 変数 2 次形式の判別式 D に対して，いつも $D_K = D$ となる 2 次体 K がとれるとは限らない．このような場合には K の整数環のイデアル類と対応させることができないのであるが，このことについては次節で述べることにする．

$D_K < 0$ の場合，K は虚 2 次体となるので命題 3.6 により狭義のイデアル類 $\mathcal{P}_K^+$ はイデアル類と一致する．しかし $D_K > 0$ の場合は必ずしもそうならないので注意を要する．

上の定理を使って K の類数を実際に求めることが可能である．それは Gauss の簡約理論というものである．

例えば $D < 0$ なら $F_{\mathrm{prim}, D}$ の元 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ で条件

$$c > a \geq b > -a \text{ 又は } c = a \geq b \geq 0$$

を満たすものの数を考えるとそれが類数になる．$D < 0$ の場合，上の条件を満たす形式は簡約 2 次形式と呼ばれる．

$D > 0$ の場合も簡約 2 次形式の概念が定義できる．ただしその場合は簡約 2 次形式とイデアル類の対応は 1 対 1 ではなく対応する 2 次の無理数の連分数展開を考えて類数が求まる．

4　3-tensors の空間

この節では，まず 3-tensors の空間 V を定義することからはじめる．その後，V の元を 3 つの 2 変数 2 次形式に対応を考えることによって判別式と V の元が原始的であるという概念を定義する．

定義 4.1 $\mathrm{GL}(2)$ を代数群，Aff^2 を 2 次元のアフィン空間とする．$\mathrm{GL}(2)$ が Aff^2 上で標準的に作用しているとする．このとき $G = \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ の表現 $V = \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2$ を 3-tensors の空間，V の元を 3-tensor という．

V の元 x に対して座標 (x_{ijk}) を導入する．e_1, e_2 を Aff^2 の標準的な基底とする．このとき 3-tensor $x \in V$ は

$$x = \sum_{i,j,k=1}^{2} x_{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

の形で表すことができる．もちろん $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k \mid i,j,k = 1,2\}$ は V の基底である．

定義 4.2 各 $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ の係数 x_{ijk} により座標 (x_{ijk}) を定義する．

$\mathfrak{S}_3$ を 3 次の対称群とする．いま V を G の表現として扱ったが，$\mathfrak{S}_3$ から V への作用も考えることができる．$\mathfrak{S}_3$ の作用を次のように定義する．

定義 4.3 $\mathfrak{I}$ を $\{1,2,3\}$ から $\{1,2\}$ への写像の集合とし，$I \in \mathfrak{I}$ に対して $e_I = e_{I(1)} \otimes e_{I(2)} \otimes e_{I(3)}$ とおく．このとき V 上での対称群 $\mathfrak{S}_3$ の作用を $\sigma(e_I) = e_{I\circ\sigma^{-1}}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ の線形拡張により定義する．

上記の定義において 3-tensor x の e_I の係数を x_I とおくことにすれば $\sigma(x)_I = x_{I\circ\sigma}$ が成り立つことに注意する．対称群 $\mathfrak{S}_3$ から G への作用も V の場合と同様に定めることができる．この場合には，$g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ に対して

$$\sigma(g) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, g_{\sigma(2)}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_3)$$

によって作用することになる．

このようにして対称群 $\mathfrak{S}_3$ から表現 V 上への作用が定まるが，計算によって次が成り立つことを確かめることができる．

補題 4.4 すべての $g \in G, \sigma \in \mathfrak{S}_3, x \in v$ に対して $\sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x)$ となる．

$\mathrm{GL}(2)$ の表現 $W = \mathrm{Sym}^2\mathrm{Aff}^2$ を 2 変数 2 次形式の空間と同一視し，作用を 2 変数の線形変換により与えられるものとする．

空間 W 上 G の表現 W_1 を

$$(g_1, g_2, g_3)w = \det g_2 \det g_3 \ g_1 w, \qquad (g_1, g_2, g_3) \in G, \ w \in W$$

により定める．W_2, W_3 も同様に定める．$\nu = (123) \in \mathfrak{S}_3$ とおき，ν を G の自己同型写像とみなせば，$W_1^{\nu} \cong W_2$, $W_1^{\nu^2} \cong W_3$ となる．

いまから 3-tensor x を 3 つの 2 変数 2 次形式 $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ に対応させる．これによって 2 変数 2 次形式の空間の良い性質が 3-tensor の空間へ移るのである．

定義 4.5 3-tensor x を

$$M_x(u,v) = \begin{pmatrix} x_{111} & x_{112} \\ x_{121} & x_{122} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x_{211} & x_{212} \\ x_{221} & x_{222} \end{pmatrix} v$$

のように 2 変数 u, v の線形形式による 2×2 行列に付随させる.

このとき (u,v) を行ベクトルとみなすと，直接計算することによって

$$M_{gx}(u,v) = g_2 M_x((u,v)g_1)\ {}^t g_3, \qquad g = (g_1, g_2, g_3) \in G$$

が得られる．そこで，2 変数 u, v の 2 次形式 $Q_1(x)$ を $Q_1(x)(u,v) = \det(M_x(u,v))$ により定義する．このとき写像 $Q_1 : V \longrightarrow W_1$ は G-equivariant，即ち

$$Q_1(gx) = g_1 \cdot Q_1(x) \quad (g = (g_1, g_2, g_3) \in G, x \in V)$$

と表せるように G-作用と写像 Q_1 が可換となる. 残り 2 つの 2 変数 2 次形式 $Q_2(x), Q_3(x)$ に対しては

$$Q_2(x) = Q_1(\nu(x)), \quad Q_3(x) = Q_1(\nu^2(x)) \qquad (\nu = (132) \in \mathfrak{S}_3)$$

と定義する. 同様に $Q_2 : V \to W_2, \quad Q_3 : V \to W_3$ も G-equivariant となる．$j = 1, 2, 3$ に対して

$$Q_j(x) = A_j u^2 + B_j uv + C_j v^2, \quad \Delta_j = B_j^2 - 4A_j C_j$$

とおく．このとき Δ_j は $Q_j(x)$ の判別式である．$\Delta_j(x)$ を x の多項式とみなすことにする．定義に従って計算すれば，$Q_j(x)$ の各係数を求めることができる.

補題 4.6 $Q_j(x) = A_j u^2 + B_j uv + C_j v^2$ $(j = 1, 2, 3)$ の各係数 $A_1, \cdots, C_3$ は次の通りになる.

$Q_1(x)$ の係数
$$\begin{aligned} A_1 &= x_{111}x_{122} - x_{121}x_{112} \\ B_1 &= x_{111}x_{222} + x_{211}x_{122} - x_{121}x_{212} - x_{221}x_{112} \\ C_1 &= x_{211}x_{222} - x_{221}x_{212} \end{aligned}$$

$Q_2(x)$ の係数
$$\begin{aligned} A_2 &= x_{111}x_{212} - x_{112}x_{211} \\ B_2 &= x_{111}x_{222} + x_{121}x_{212} - x_{112}x_{221} - x_{122}x_{211} \\ C_2 &= x_{121}x_{222} - x_{122}x_{221} \end{aligned}$$

$Q_3(x)$ の係数
$$\begin{aligned} A_3 &= x_{111}x_{221} - x_{211}x_{121} \\ B_3 &= x_{111}x_{222} + x_{112}x_{221} - x_{211}x_{122} - x_{212}x_{121} \\ C_3 &= x_{112}x_{222} - x_{212}x_{122} \end{aligned}$$

定義より $\Delta_j(x) = B_j^2 - A_jC_j$ $(j = 1,2,3)$ であるから直接計算することによって $\Delta_1(x) = \Delta_2(x) = \Delta_3(x)$ となることが確かめられる．

次に別の方法で $\Delta_1(x) = \Delta_2(x) = \Delta_3(x)$ となることを示す．(G,V) を定義 4.1 で定めた表現空間とする．

命題 4.7 (G,V) は概均質ベクトル空間である．さらに $\Delta_j(x)$ $(j = 1,2,3)$ を $x \in V$ の多項式とみなすことにすれば，$\Delta_j(x)$ $(j = 1,2,3)$ は相対不変式で

$$\Delta_j(gx) = \chi(g)\Delta_j(x) \quad (\chi(g) = (\det g_1 \det g_2 \det g_3)^2, g = (g_1,g_2,g_3) \in G)$$

をみたす．

証明　(G,V) が概均質ベクトル空間であることを言うためには，命題 2.13 の式 $\dim T(G_w)_e = \dim G - \dim V$ が成り立つこと示せばよい．一般の点 $w \in V$ として

$$w = x_0 = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 \quad (x_0 \in V) \tag{4.8}$$

とおくと，対応する 2 変数 3-tensor は

$$M_w(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

となる．ここで $w(u,v) = M_w(u,v)$ と表すことにする．いま $G = \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$, $V = \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2$ であるから次元を考えると $\dim G = 12$, $\dim V = 8$ となる．そこで接空間 $T(G_w)_e$ を求めるために

$$h = (h_1,h_2,h_3) = \left(I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right)$$

の作用を考える．ただし $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ は dual number の環，I_2 は単位行列である．定義より h は $w(u,v)$ に対して $h \cdot w(u,v) = h_2 w((u,v)h_1)^t h_3$ と作用するから変数 (u,v) は $(u + \epsilon(a_1u + a_3v), v + \epsilon(a_2u + a_4v))$ に変わる．h を $w(u,v)$ に作用させた元を計算すると

$$\begin{aligned} h \cdot w(u,v) = & \left(I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) \\ & \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (u + \epsilon(a_1u + a_3v)) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v + \epsilon(a_2u + a_4v)) \right) \\ & \times {}^t\!\left(I_2 + \epsilon \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h\cdot w(u,v) &= \left(I_2+\epsilon\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\right)\left(w(u,v)+\epsilon\begin{pmatrix} a_1u+a_3v & 0 \\ 0 & a_2u+a_4v\end{pmatrix}\right) \\
&\quad\times\left(I_2+\epsilon\begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4\end{pmatrix}\right) \\
&= w(u,v)+\epsilon\left\{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4\end{pmatrix}w(u,v)+\begin{pmatrix} a_1u+a_3v & 0 \\ 0 & a_2u+a_4v\end{pmatrix}\right. \\
&\quad\left.+w(u,v)\begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4\end{pmatrix}\right\} \\
&= w(u,v)+\epsilon\begin{pmatrix} (a_1+b_1+c_1)u+a_3v & c_3u+b_2v \\ b_3u+c_2v & a_2u+(a_4+b_4+c_4)v\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $h\cdot w(u,v)=w(u,v)$ となるための条件を求めると

$$
a_1+b_1+c_1=0,\ a_4+b_4+c_4=0,\ a_3=c_3=b_2=b_3=c_2=a_2=0
$$

が得られる．したがって $T(G_w)_e$ は

$$
\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(a_1+b_1) & 0 \\ 0 & -(a_4+b_4)\end{pmatrix}\right)
$$

の形の元からなる．よって $\dim T(G_w)_e=4$ となり $\dim T(G_w)_e=\dim G-\dim V$ が成り立つ．命題 2.12 および命題 2.13 によって (G,V) が概均質ベクトル空間で $V^{\mathrm{ss}}_{k^{\mathrm{sep}}}$ はただ１つの $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道をもつ．

次に $\Delta_j(x)$ が相対不変式になることを示す．そのために (G',W) を定義 2.14 で定めた表現空間とする．即ち，$G'=\mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(2),\ V=\mathrm{Sym}^2\mathrm{Aff}^2$ とする．命題 2.16 で示したように (G',W) は概均質ベクトル空間である．そこで $f(u,v)\in W$ に対する判別式を $\Delta_W(f)$ と表す．(2.17) により $(t,g_0)\in G'$ に対して

$$
\Delta_W((t,g_0)\cdot f)=t^2\det g_0\Delta_W(f)\quad (f\in W)
$$

が成り立つから $g=(g_1,g_2,g_3)\in G, x\in V$ に対して $\Delta_1(x)$ を考えると

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(gx) &= \Delta_W(Q_1(gx))=\Delta_W((\det g_2\det g_3)g_1Q_1(x)) \\
&= (\det g_1\det g_2\det g_3)^2\Delta_W(Q_1(x)) \\
&= \chi(g)\Delta_1(x)\quad (\chi(g)=(\det g_1\det g_2\det g_3)^2)
\end{aligned}
$$

が得られる．同様にして $\Delta_2(gx)=\chi(g)\Delta_2(x),\ \Delta_3(gx)=\chi(g)\Delta_3(x)$ も得られる．したがって $\Delta_j(x)$ $(j=1,2,3)$ は相対不変式である．□

上の命題により $\Delta_1(x)/\Delta_2(x)$ と $\Delta_2(x)/\Delta_3(x)$ は G の作用に関して不変である．$V_{k^{\mathrm{sep}}}^{\mathrm{ss}}$ は，ただ 1 つの $G_{k^{\mathrm{sep}}}$-軌道をもつから $\Delta_1(x)/\Delta_2(x)$ と $\Delta_2(x)/\Delta_3(x)$ は $V_{k^{\mathrm{sep}}}^{\mathrm{ss}}$ 上で定数となる．すなわち $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \Delta_3(x)$ は比例する．そこで (4.8) の点 $x_0 \in V$ に対して $Q_1(x_0)$ を考えると $Q_1(x_0) = uv$ となり $\Delta_1(x_0) = 1$ が得られる．一方，3-tensor x_0 は $\mathfrak{S}_3$-不変だから $\Delta_2(x_0) = \Delta_3(x_0) = 1$ である．したがって $\Delta_1(x) = \Delta_2(x) = \Delta_3(x)$ となる．この共通の値を x の判別式と呼び，$\Delta(x)$ と表すことにする．

5 Class of primitive 3-tensors

この節では１つ目の主定理を示す．いくつかの準備をしたあとに定理を証明することにする．

定義 5.1 x を整 3-tensor $(x \in V_{\mathbb{Z}})$ とする．x から得られる２つの２変数２次形式 $Q_1(x),\ Q_2(x)$ がともに原始的であるときに，x は原始的であると定義する．

注 5.2 上の定義で $Q_3(x)$ が現れないのは不思議に思われるかもしれないが，整 3-tensor x に対して $Q_1(x),\ Q_2(x)$ が原始的であるとき，実は $Q_3(x)$ も原始的となる．このことはあとで述べる系 7.6 によって示される．したがって上の定義で十分である．

$H_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ とおく．このときに定義 4.1 の場合と同じように $H_{\mathbb{Z}}$ は整 3-tensor へ標準的に作用する．いまから整 3-tensor の同値類を定義する．

定義 5.3 x_1, x_2 を整 3-tensor $(x \in V_{\mathbb{Z}})$ とする．x_1 のある $H_{\mathbb{Z}}$ の元を作用させると x_2 になるとき，x_1, x_2 が $H_{\mathbb{Z}}$-同値であるといい，$x_1 \sim x_2$ とかく．また，x_1 の同値類を $[x_1]$ によって表す．判別式が D で原始的な整 3-tensor の類の集合を V_D^* と表すことにする．

次の定理は，補題の条件として用いるためのものである．

定義 5.4 $(F_1(u,v), F_2(u,v))$ を整２変数２次形式の対とする．$F_1(1,0)$ と $F_2(1,0)$ の最大公約数が１となるとき，対 (F_1, F_2) は互いに素であると定義する．

これで準備はできた．ここからは定理を証明するために，いくつかの補題に分けて示すことにする．

補題 5.5 ２つの２変数２次形式

$$F_i(u,v) = R_i u^2 + S_i uv + T_i v^2 \quad (R_i, S_i, T_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2)$$

が $\gcd(R_1, S_1, T_1, R_2, S_2, T_2) = 1$ をみたしているとする．このとき，$F_1' \sim F_1$ かつ $F_2' \sim F_2$ となるような互いに素の対 (F_1', F_2') が存在する．

以下，議論を簡単にするため $V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合 Ω を $\Omega = \{x \in V_{\mathbb{Z}} \mid x_{111} = 1, x_{112} = 0\}$ としておくことにする．

補題 5.6 整 3-tensor x $(x \in V_{\mathbb{Z}})$ に対して $Q_1(x)$ が原始的であるとする．このとき $hx \in \Omega$ かつ $Q_2(hx) = Q_2(x)$ となるような $h \in H_{\mathbb{Z}}$ が存在する．

証明　補題 4.6 より A_1, B_1, C_1 の各項は行列

$$M_x(u,v) = \begin{pmatrix} x_{111} & x_{112} \\ x_{121} & x_{122} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x_{211} & x_{212} \\ x_{221} & x_{222} \end{pmatrix} v$$

の第１行目の係数，つまり $x_{111}, x_{112}, x_{211}, x_{212}$ のうちのどれかを含んでいる．したがって $x_{111}, x_{112}, x_{211}, x_{212}$ の公約数は A_1, B_1, C_1 の公約数でもある．仮定より $Q_1(x)$ は原始的であるから $\gcd(A_1, B_1, C_1) = 1$ となる．よって $\gcd(x_{111}, x_{112}, x_{211}, x_{212}) = 1$ となる．$\mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Z}}$ の任意の元 g に対して，$h_1 g\, {}^t h_3$ が対角行列となるように $\mathrm{SL}(2)$ の元 h_1, h_3 をとることができることが知られている．このことから

$$h_1 \begin{pmatrix} x_{111} & x_{112} \\ x_{211} & x_{212} \end{pmatrix} {}^t h_3 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし } d_1 \mid d_2)$$

と対角化できる．しかも d_1 は $x_{111}, x_{112}, x_{211}, x_{212}$ を割るようにとることができる．いま $\gcd(x_{111}, x_{112}, x_{211}, x_{212}) = 1$ であるから $d_1 = \pm 1$ となる．h_1 を適当に変えることによって $d_1 = 1$ としてよい．そこで $h = (h_1, 1, h_3) \in H_{\mathbb{Z}}$ とおけばよい．□

１つ目の主定理を証明する上で，3-tensor の類の集合と２つの２変数２次形式の類の集合が１対１に対応することを示すことになる．その中で補題 5.6 と補題 5.7 は，ちょうど単射性を示す部分になっている．

補題 5.7 $x \in \Omega$ に対し $Q_1(x)$ が原始的であるとする．このとき

$$hx \in \Omega,\ Q_2(hx) = Q_2(x) \text{ かつ，対 } (Q_1(hx), Q_2(x)) \text{ が互いに素}$$

となるような $h \in H_{\mathbb{Z}}$ が存在する．

証明　$Q_1(x)$ が原始的となるような元 $x \in \Omega$ をとる．このとき

$$M_x(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{121} & x_{122} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x_{211} & x_{212} \\ x_{221} & x_{222} \end{pmatrix} v$$

とおいて $Q_1(x)(u, v) = A_1 u^2 + B_1 uv + C_1 v^2$ を実際に計算すると

$$Q_1(x)(u, v) = x_{122} u^2 + (x_{222} + x_{122} x_{211} - x_{121} x_{212}) uv + (x_{211} x_{222} - x_{212} x_{221}) v^2$$

となる．$d = \gcd(x_{122}, x_{212}, x_{222}) \quad (d > 0)$ とおくと d は，A_1, B_1, C_1 を割り切る．一方，$Q_1(x)$ は原始的であるから $\gcd(A_1, B_1, C_1) = 1$．したがって $d = 1$ となる．

$h = (h_1, h_2, h_3) \in H_{\mathbb{Z}}$ として

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x_{211} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha x_{212} & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{Z})$$

となるものをとる．$h_2 = 1$ なので $Q_2(hx) = Q_2(x)$ となることに注意する．$y = hx$ とおくと $y \in \Omega$ であることが確かめられる．そこで再び

$$M_y(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_{121} & y_{122} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} y_{211} & y_{212} \\ y_{221} & y_{222} \end{pmatrix} v$$

とおくことにすると，簡単な計算によって $y_{212}=x_{212}$ および

$$y_{122}=x_{122}(1-\alpha x_{211})+\alpha x_{222}-\alpha x_{212}(x_{121}+\alpha x_{221}-\alpha x_{211}x_{121})$$

が得られる．いま y_{122} は $Q_1(y)(u,v)$ における u^2 の係数．y_{212} は $Q_2(y)(u,v)$ における u^2 の係数となるので，$\gcd(y_{122},y_{212})=1$ となるように $\alpha\in\mathbb{Z}$ を選んでやればよい．

$y_{212}=x_{212}$ を割る素数全体の集合 P を考えて次のような 2 つの集合 P_1,P_2 に分ける．

$$\begin{aligned}P_1&=\{p\in P\mid p\text{ は }x_{122}\text{を割らない}\}\\P_2&=\{p\in P\mid p\text{ は }x_{122}\text{を割るが }x_{222}\text{を割らない}\}\end{aligned}$$

$\gcd(x_{122},x_{212},x_{222})=1$ であるから $P=P_1\cup P_2$ となることに注意する．α として，すべての $p\in P_1,q\in P_2$ に対し $\alpha\equiv 0 \mod p$ かつ $\alpha\equiv 1 \mod q$ が成り立つように α を選ぶ．このとき y_{212} を割る素数 p（即ち $p\in P$）に対して p は y_{122} を割らない．したがって $\gcd(y_{122},y_{212})=1$ が得られる．□

3-tensor の類の集合と 2 つの 2 変数 2 次形式の類の集合の対応を示す上で，次の補題は全射性を示す部分にあたる．

補題 5.8 2 つの 2 変数 2 次形式

$$F_i(u,v)=R_iu^2+S_iuv+T_iv^2\quad(R_i,S_i,T_i\in\mathbb{Z},\quad i=1,2)$$

の判別式が互いに等しくて，対 (F_1,F_2) が互いに素であるとする．このとき，ある $x\in\Omega$ が存在して

$$Q_1(x)=F_1,\quad Q_2(x)=F_2 \tag{5.9}$$

となる．

また，$x\in\Omega$ が性質 (5.9) をみたすための必要十分条件は $M_x(u,v)$ が

$$M_x(u,v)=\begin{pmatrix}1&0\\\epsilon&R_1\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}\zeta&R_2\\\eta&S_+\end{pmatrix}v\quad\left(S_+=\frac{S_1+S_2}{2},S_-=\frac{S_1-S_2}{2}\right)$$

の形でかけることである．ただし $\zeta,\ \epsilon,\ \eta$ は不定方程式

$$\begin{aligned}&R_1\zeta-R_2\epsilon=S_-\\&\eta=\tfrac{1}{R_1}(S_+\epsilon-T_2)=\tfrac{1}{R_2}(S_+\zeta-T_1)\end{aligned}$$

をみたす整数である．さらに，$x_1,x_2\in\Omega$ が性質 (5.9) をみたすならば，$x_1\sim x_2$（$H_{\mathbb{Z}}$-同値）となる．

証明　$x\in\Omega$ に対して

$$M_x(u,v)=\begin{pmatrix}1&0\\\epsilon_1&\epsilon_2\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}\zeta_1&\zeta_2\\\eta_1&\eta_2\end{pmatrix}v$$

とおくことにする．このとき

$$Q_1(x)(u,v) = \epsilon_2 u^2 + (\eta_2 + \zeta_1\epsilon_2 - \zeta_2\epsilon_1)uv + (\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1)v^2$$
$$Q_2(x)(u,v) = \zeta_2 u^2 + (\eta_2 + \zeta_2\epsilon_1 - \zeta_1\epsilon_2)uv + (\epsilon_1\eta_2 - \epsilon_2\eta_1)v^2$$

となる．この 2 次式 $Q_1(x), Q_2(x)$ と与えられた 2 次式 F_1, F_2 の u^2 の係数および uv の係数を比較してまとめると

$$\epsilon_2 = R_1, \quad \zeta_2 = R_2, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = S_+$$

を得る．仮定により 2 つの 2 次式 F_1, F_2 の判別式は等しいから $S_1^2 - 4R_1T_1 = S_2^2 - 4R_2T_2$ となる．これにより $S_+ \in \mathbb{Z}$ となることに注意する．

同様にして，2 組の 2 次式の uv の係数と v^2 の係数を比較し整理する．その際，定数 $\epsilon_2 = R_1, \zeta_2 = R_2$ を代入すれば次のような式が得られる．

$$S_+\zeta_1 - R_2\eta_1 = T_1 \tag{5.10}$$
$$S_+\epsilon_1 - R_1\eta_1 = T_2 \tag{5.11}$$
$$R_1\zeta_1 - R_2\epsilon_1 = S_- \tag{5.12}$$

$\gcd(R_1, R_2) = 1$ だから式 (5.12) をみたす $\zeta_1, \epsilon_1 \in \mathbb{Z}$ がとれる．

いま $S_1^2 - 4R_1T_1 = S_2^2 - 4R_2T_2$ であることから簡単に $S_+S_- = R_1T_1 - R_2T_2$ を導くことができる．(5.12) の両辺に S_+ をかけて右辺の S_+S_- に $R_1T_1 - R_2T_2$ を代入して整理すると

$$(S_+\zeta_1 - T_1)R_1 = (S_+\epsilon_1 - T_2)R_2$$

となる．このことと $\gcd(R_1, R_2) = 1$ となることから R_1 は $S_+\epsilon_1 - T_2$ を割ると同時に，R_2 も $S_+\zeta_1 - T_1$ を割ることになる．したがって

$$\frac{1}{R_1}(S_+\epsilon_1 - T_2) = \frac{1}{R_2}(S_+\zeta_1 - T_1) \in \mathbb{Z}$$

となる．η_1 としてこの共通の値をとると，2 つの方程式 (5.10),(5.11) は解ける．これで最後の部分以外は示された．

最後に，性質 (5.9) をみたす $x, x' \in \Omega$ が $x \sim x'$ となることを示す．$x, x' \in \mathbb{Z}$ に対応する行列 $M_x(u,v), M_{x'}(u,v)$ を

$$M_x(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & R_1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \zeta & R_2 \\ \eta & S_+ \end{pmatrix} v, \quad M_{x'}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon' & R_1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \zeta' & R_2 \\ \eta' & S_+ \end{pmatrix} v$$

とおく．ただし $(\zeta, \epsilon), (\zeta', \epsilon')$ は条件

$$R_1\zeta - R_2\epsilon = S_-$$
$$R_1\zeta' - R_2\epsilon' = S_-$$

をみたす．そこで辺辺をひいてまとめると

$$R_1(\zeta - \zeta') = R_2(\epsilon - \epsilon')$$

となる．仮定より $\gcd(R_1, R_2) = 1$ だから $R_1 \mid (\epsilon - \epsilon'), R_2 \mid (\zeta - \zeta')$．したがって $(\zeta', \epsilon') = (\zeta + R_2\xi, \epsilon + R_1\xi)$ となるような $\xi \in \mathbb{Z}$ が存在する．このとき η と η' の関係は $\eta' = \eta + S_+\xi$ となることが条件式から確かめることができる．

$x' = hx$ をみたす $h \in H_{\mathbb{Z}}$ として

$$h = (1, 1, h_3), h_3 = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をとることができる．よって $x \sim x'$ となる．□

補題 5.8 は，3-tensor の類の集合と 2 つの 2 変数 2 次形式の類の集合との対応において本質的に全射性を証明しているが，そのまま使うことはできない．次の補題と組み合わせることで全射性の証明が完成する．

補題 5.13 3 つの 2 変数 2 次形式

$$\begin{aligned} F_i(u,v) &= R_i u^2 + S_i uv + T_i v^2 \quad (R_i, S_i, T_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2) \\ F_1'(u,v) &= R_1' u^2 + S_1' uv + T_1' v^2 \quad (R_1', S_1', T_1' \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

の判別式が互いに等しく，$F_1' \sim F_1$ で対 (F_1, F_2) と (F_1', F_2) がともに互いに素であると仮定する．

$x, x' \in \Omega$ として

$$Q_1(x) = F_1,\ Q_1(x') = F_1',\ Q_2(x) = Q_2(x') = F_2$$

をみたすような元をとれば，$x' \sim x$ となる．

証明　仮定より $F_1' \sim F_1$ であるから

$$F_1' = h_1 F_1, \quad h_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となるような $h_1 \in \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ が存在する．これによって

$$R_1' = R_1\alpha^2 + S_1\alpha\beta + T_1\beta^2$$

となる．いま，$Q_1(x) = F_1, Q_2(x) = F_2$ であるから補題 5.8 により $x \in \Omega$ は

$$M_x(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & R_1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \zeta & R_2 \\ \eta & S_+ \end{pmatrix} v \quad \left(S_+ = \frac{S_1 + S_2}{2}, S_- = \frac{S_1 - S_2}{2}\right)$$

の形でかける．ただし $\epsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{Z}$ は式

$$R_1\zeta - R_2\epsilon = S_- \tag{5.14}$$

$$\eta = \frac{1}{R_1}(S_+\epsilon - T_2) = \frac{1}{R_2}(S_+\zeta - T_1) \tag{5.15}$$

をみたしていることに注意する．そこでまず $\gcd(\alpha + \beta\zeta, R_2) = 1$ となることを示す．計算により

$$\begin{aligned}
&(R_1\alpha + S_+\beta)(\alpha + \beta\zeta) - R_2(\beta^2\eta + \alpha\beta\epsilon) \\
&= R_1\alpha^2 + (R_1\zeta - R_2\epsilon + S_+)\alpha\beta + (S_+\zeta - R_2\eta)\beta^2 \\
&= R_1\alpha^2 + (S_- + S_+)\alpha\beta + T_1\beta^2 \quad ((5.14), (5.15)\text{ より}) \\
&= R_1\alpha^2 + S_1\alpha\beta + T_1\beta^2 \\
&= R_1'
\end{aligned}$$

したがって

$$(R_1\alpha + S_+\beta)(\alpha + \beta\zeta) = R_1' + R_2(\beta^2\eta + \alpha\beta\epsilon)$$

が得られる．仮定より $\gcd(R_1', R_2) = 1$ だから $\gcd(\alpha + \beta\zeta, R_2) = 1$ となる．

一方で $h_1 \in \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ だから $\gamma\alpha + (-\delta)\beta = 1$．したがって $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ となる．これによって $\gcd(\alpha + \beta\zeta, R_2\beta) = 1$ が得られるから $\lambda(\alpha + \beta\zeta) + \mu R_2\beta = 1$ をみたす $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ が存在する．そこで

$$h = (h_1, 1, h_3) \in H_{\mathbb{Z}}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -R_2\beta & \alpha + \beta\zeta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$$

とおくと $y = hx$ で，かつ $y \in \Omega$ となる．作り方から

$$\begin{aligned}
Q_1(y) &= Q_1(hx) = h_1Q_1(x) = Q_1(x') \\
Q_2(y) &= Q_2(hx) = Q_2(x) = Q_2(x')
\end{aligned}$$

となる．いま $x', y \in \Omega$ であるから補題 5.8 により $x' \sim y$ となる．$x \sim y$ に注意すれば $x \sim x'$ が得られる．□

補題 5.6 と補題 5.7 の結果をまとめると次の命題が得られる．

命題 5.16 整 3-tensor x, x' $(x, x' \in V_{\mathbb{Z}})$ を $Q_1(x)$ が原始的で

$$Q_1(x) \sim Q_1(x'), \quad Q_2(x) \sim Q_2(x') \qquad (\mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}\text{同値})$$

をみたすものとする．

このとき $x \sim x'$ （$H_{\mathbb{Z}}$-同値）となる．

証明　$Q_2(x) \sim Q_2(x')$ だから，ある $h_2 \in \mathrm{SL}(2)_{\mathbb{Z}}$ が存在して $h_2 Q_2(x) = Q_2(x')$ とできる．ここで $g = (1, h_2, 1) \in H_{\mathbb{Z}}$ とおけば $Q_2(gx) = Q_2(x')$ となる．

補題 5.6 を gx, x' にそれぞれ適用させると，ある $h, h' \in H_{\mathbb{Z}}$ があって

$$hgx,\ h'x' \in \Omega \quad \text{かつ} \quad Q_2(hgx) = Q_2(h'x')$$

をみたす．さらにまた，補題 5.7 を $hgx, h'x'$ にあてはめると

$$\bar{h}hgx,\ \bar{h}'h'x' \in \Omega \quad \text{および} \quad Q_2(\bar{h}hgx) = Q_2(\bar{h}'h'x')$$

をみたすと同時に

$$(Q_1(\bar{h}hgx), Q_2(\bar{h}hgx)),\ (Q_1(\bar{h}'h'x'), Q_2(\bar{h}'h'x'))$$

がともに互いに素となるような元 $\bar{h}, \bar{h}' \in H_{\mathbb{Z}}$ が存在する．そこで $\bar{h}hgx, \bar{h}'h'x'$ をそれぞれ x, x' に置き換えて補題 5.13 を用いると $x \sim x'$ が得られる．□

これで１つ目の主定理の証明の大部分は終わった．最後に主定理を述べて証明を完結させることにする．

定理 5.17 （主定理）
V_D^* の個数は $D > 0$ のとき $h(D)^2$．$D < 0$ のとき $4h(D)^2$ となる．

証明　次のような写像を考える．

$D > 0$ のとき写像 $q\ :\ V_D^* \longrightarrow F_D^* \times F_D^*$ を

$$[x]\ \longmapsto\ ([Q_1(x)],\ [Q_2(x)])$$

$D < 0$ のとき写像 $q\ :\ V_D^* \longrightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times F_D^* \times F_D^*$ を

$$[x] \longmapsto (\mathrm{sgn}(Q_1(x)),\ \mathrm{sgn}(Q_2(x)),\ [\mathrm{sgn}(Q_1(x))Q_1(x)],\ [\mathrm{sgn}(Q_2(x))Q_2(x)])$$

により定める．ただし

$$\mathrm{sgn}(F) = \begin{cases} \ \ 1 & (F\ \text{が正値の 2 次形式のとき}) \\ -1 & (F\ \text{が負値の 2 次形式のとき}) \end{cases}$$

このとき写像 q が全単射であることいえばよい．

$D > 0$ に関して，命題 5.16 より写像 q が単射である．次に $(\Lambda_1, \Lambda_2) \in F_D^* \times F_D^*$ を任意にとる．補題 5.5 により $[F_i] = \Lambda_i\ \ (i = 1, 2)$ をみたす互いに素の対 (F_1, F_2) を見つけることができる．そこで補題 5.8 を用いると $Q_1(x) = F_1,\ \ Q_2(x) = F_2$ となるような $x \in \Omega$ がとれるから，写像 q は全射となる．$D < 0$ の場合についても同様に示すことができる．□

6　２次体における order

注 3.8 でも述べたように２次形式の類（F_D^* の元）を整数環のイデアル類へ対応させようとすると不都合が生じることがある．例えば次のようなものがそうである．

例 6.1　２次形式 $f \in F_{\mathrm{prim},D}$ として

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2, \quad D = -12$$

をとると $D_K = D$ となる２次体 K がとれない.

この問題を解消するために整数環のかわりに order（整環）というものを考える．この節では，まずはじめに代数体の order を定義する．そのあとに２次体の order について述べることにする．order を定義するためにいくつかの準備をしよう.

定義 6.2

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 K を代数的数体という．K の元は代数的な元と呼ばれる.

(2) K を代数的数体とし，$\mu_1 \cdots \mu_m$ を任意の有限個の K の元とする．有理整係数 $c_i (1 \leq i \leq m)$ のすべての１次結合

$$c_1\mu_1 + \cdots + c_m\mu_m$$

全体 M を体 K における加群という．$\mu_1, \cdots, \mu_m$ を加群 M の生成元と呼ぶ.

M が $\mu_1, \cdots, \mu_m$ で生成されているとき $M = \{\mu_1, \cdots, \mu_m\}$ とかくことにする.
　各加群 $M = \{\mu_1, \cdots, \mu_m\}$ と元 $\alpha \in K$ に対して，記号 αM は $\alpha M = \{\alpha\xi \mid \xi \in M\}$ を表す．明らかに αM は $\alpha\mu_1, \cdots, \alpha\mu_m$ の１次結合全体と一致する．即ち $\alpha M = \{\alpha\mu_1, \cdots, \alpha\mu_m\}$ となる.
　上の定義で加群を定めた．この加群を使って order を定義することにする.

定義 6.3

(1) 代数的数体 K の２つの加群 M と M_1 に対し K のある元 $\alpha \neq 0$ が存在して $M_1 = \alpha M$ となるとき M と M_1 は同値 (あるいは相似) であると定義する．特に，α のノルムが正のときは狭義の同値 (または狭義の相似) であると定義する.

(2) K を n 次の代数的数体とする．K の加群 M が，有理数体上 n 個の１次独立な元を含むとき M は完全であるといい，そうでないときは不完全と呼ぶ.

(3) 加群 M の生成元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が，整数環上１次独立であるとき $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ は基であるという.

(4) K を代数的数体，M を K の完全加群とする．$\alpha \in K$ に対して $\alpha M \subset M$ となるとき α は M の乗数であるという.
　加群 M のすべての乗数全体の集合 $\mathcal{O}_M$ は環となる．環 $\mathcal{O}_M$ を乗数環とよぶ.

(5) K を代数的数体とする．完全加群 $\mathcal{O}$ が 1 を含む環であるとき，$\mathcal{O}$ を K の order（整環）とよぶ．同一の代数的数体 K において，K の order のうち極大なものを maximal order という．

次の補題は加群がある order に必ず属することを表している．証明は ([5],p107) にある．

補題 6.4 代数的数体 K の任意の完全加群に対する乗数環はこの体の order となる．

M を K の完全加群とし，$\mathcal{O}$ をその乗数環とする．上の補題によって $\mathcal{O}$ は order となる．この場合，定義によって M は $\mathcal{O}$ のイデアルとみることができる．

同一の代数的数体 K において，もちろん maximal order は存在するわけだが，実はこれが他の order をすべて含んでいる．次の命題では代数的数体 K の maximal order が，K の整数環と一致すること表している．証明は ([5],p112) にある．

命題 6.5 代数的数体 K の元で，最小多項式の係数が有理整数となるものの全体は K の maximal order となる．

$d \neq 1$ を 2 乗の因子を含まない整数，$\widetilde{\mathcal{O}}$ を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の maximal order（即ち整数環）とする．このとき $\widetilde{\mathcal{O}}$ の基として $1, \omega$ をとることができる．ただし

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2} & (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}) \\ \sqrt{d} & (d \equiv 2 \text{ または } 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\widetilde{\mathcal{O}}$ の判別式 D_1 （すなわち体 K の判別式）は

$$D_1 = \begin{cases} d & (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき}) \\ 4d & (d \equiv 2 \text{ または } 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であった．次の命題は 2 次体の order の形を決定づけるものである．この証明については ([5],p159-161) で示されている．

命題 6.6 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の任意の整環は $\mathcal{O}_f = \{1, f\omega\}$ の形をしている．ただし f は指数 $(\widetilde{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_f)$．さらに，整環 $\mathcal{O}_f$ の判別式は $D_1 f^2$ に等しい．

2 次体の完全加群について述べる．各加群 $\{\alpha, \beta\}$ は加群 $\{1, \beta/\alpha\}$ と同値であるから $\{1, \gamma\}$ の形の加群だけで考えてもよい．γ は 2 次体 K の無理数であるからある有理整数係数多項式 $at^2 + bt + c$ の根となる．そこで $a > 0$ かつ $(a, b, c) = 1$ という条件を付ければ，γ に対して多項式 $at^2 + bt + c$ が一意的に定まる．この多項式を ψ_γ で表す．

次の命題は ([5],p167) で示されているが，2 変数 2 次形式と order に属する加群を対応付ける上でとても重要である．

命題 6.7 $at^2 + bt + c$ を 2 次体 K の無理数 γ に対応する多項式とする（即ち $\psi_\gamma = at^2 + bt + c$）．このとき $\widetilde{\mathcal{O}}$ を加群 $\{1, \gamma\}$ の乗数環とすれば，$\widetilde{\mathcal{O}} = \{1, a\gamma\}$ で $\widetilde{\mathcal{O}}$ は order となる．また，その判別式 D は $D = b^2 - 4ac$ である．

原始的な整２変数２次形式を与えたとき，上の命題によって加群が１つ対応する．

3節ですでに原始的な整２変数２次形式の同値類を定義したが上の命題のような対応を考えると実は，原始的な整２変数２次形式の類は狭義の加群の類と対応する．このことを説明するために次の命題を挙げる．

命題 6.8 γ_1, γ_2 を２次体 K の無理数とする．加群 $\{1, \gamma_1\}, \{1, \gamma_2\}$ が同値となるための必要十分条件は式

$$\gamma_2 = \frac{k\gamma_1 + l}{m\gamma_1 + n}, \quad \text{ただし}\ k, l, m, n \in \mathbb{Z} \quad \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = \pm 1$$

をみたすことである．

この命題の証明は ([5],p166-167) にある．原始的な整２変数２次形式 $f_i(u, v) = a_i u^2 + b_i uv + c_i v^2$ $(i = 1, 2)$ に対して $a_i\xi^2 + b_i\xi + c_i = 0$ の根 ξ_i $(i = 1, 2)$ を

$$\xi_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}, \quad \xi_2 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$$

とおいたとき $f_1(u, v)$ と $f_2(u, v)$ が同値であるための必要十分条件は

$$\xi_2 = \frac{k\xi_1 + l}{m\xi_1 + n}, \quad \text{ただし}\ k, l, m, n \in \mathbb{Z} \quad \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = 1$$

となることが知られている．証明は ([7],p98-99) にあるが，これによって原始的な整２変数２次形式の類が狭義の加群の類と対応することがわかる．

加群はある order のイデアルとみなすことができる．イデアルには積が定義されているから加群にも当然，積を考えてもよいはずである．実際に２次体の加群の場合，次のようにうまく定義できる．

定義 6.9 $M_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ $M_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$ を加群とする．このとき，加群の積 M_1M_2 を $\{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2\}$ により定める．

上の定義のように加群の類の積を定義すると，イデアル類群と似たような性質が得られる．次に定理は，その中でとてもよい性質である．

定理 6.10

(1) ２次体のある固定された order に属する加群全体は，加群の積に関して可換群をなす．

(2) ２次体の与えられた乗数環をもつ加群の同値類全体は，有限の可換群をなしている．

上の定理の証明は ([5],p169) にある．

注 6.11 上記の２つの定理は，２次体の加群に対していえることで一般の代数的数体の order に属する加群に対しては真ではない．

これらのことをまとめると次の定理が得られる．

定理 6.12 $\mathfrak{M}$ を２次体 K に属する加群の狭義の同値類全体とする．このとき写像は $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{F}$ との１対１の対応を与える．また加群の類のどれかが判別式 D をもつ乗数環に入っているとき，対応する２次形式の判別式も D となる．

上の定理によって，判別式 $D \neq 0$ の値にかかわらず判別式が D である原始的な整２変数２次形式の類の集合に対して，ある order が存在して order に属する加群の狭義の類と原始的な整２変数２次形式の類に関して１対１の対応を与えることができるのである．

7 Composition identity

これまでの議論によって，狭義の加群の類 (狭義のイデアル類) の集合と原始的な整２変数２次形式の類の集合との間に１対１対応の関係があることがわかった．いま，前者には積が定義されているが後者にはまだない．そこで後者にも積を定めることになるが，狭義のイデアル類全体の集合と２変数２次形式の類全体の集合が群として同形となるように積を定義するのが望ましい．

そこで，以下のような composition identity を用いて積を導入する．このとき，２次形式同値類の集合 F_D^* は，有限アーベル群の構造が入ることに注意する．

A として１を含む可換環，$F_i = R_i u^2 + S_i uv + T_i v^2 \quad (i = 1, 2)$ を２変数２次形式とする．$(R_i, S_i, T_i \in A)$

いま，ある２変数２次形式 F_3 と双線形形式 l_1, l_2 が存在して

$$F_1(u,v)F_2(z,w) = F_3(l_1(u,v,z,w), l_2(u,v,z,w)) \in A[u,v,z,w] \tag{7.1}$$

の形で書けるとき，恒等式 (7.1) を composition identity という．ただし

$$l_k(u,v,z,w) = a_{11k}uz + a_{12k}uw + a_{21k}vz + a_{22k}vw \qquad (k = 1, 2, \quad a_{ijk} \in A)$$

A が整域で F_1, F_2, F_3 の判別式がすべて同じでゼロでないとき R_1, R_2 は

$$R_1 = \pm(a_{111}a_{122} - a_{121}a_{112}), \quad R_2 = \pm(a_{111}a_{212} - a_{211}a_{112})$$

となる．特に符号が両方とも正ならば，恒等式 (7.1) を direct composition identity という．

$A = \mathbb{Z}$ のとき，与えられた２次形式 F_1, F_2 に対して必ず F_3 と l_1, l_2 が存在して恒等式 (7.1) が direct composition identity となる．証明は ([8], p199) に載っている．その際，狭義のイデアル類 (加群の類) の積を通して示していることに注意する．

定義 7.2 direct composition identity (7.1) に対して F_D^* の積を $[F_1] \cdot [F_2] = [F_3]$ と定める．

２つのイデアル類が与えられたとき，その積を考えると非常に複雑になる．もちろん対応する２変数２次形式の類の積を考えても同じである．しかし，２つの２変数２次形式に対応する整 3-tensor を考えることにより２変数２次形式の類の積の複雑さは大幅に改善される．そこに整 3-tensor を２変数２次形式へ対応させる意義がある．次の命題は，積を簡単にする上で重要な役割を果たす．

命題 7.3 $\mathbb{Z}[V][u,v,z,w]$ において次は direct composition identity である．

$$(A_1u^2 + B_1uv + C_1v^2)(A_2z^2 + B_2zw + C_2w^2) = -C_3l_1^2 + B_3l_1l_2 - A_3l_2^2 \tag{7.4}$$

ただし l_1, l_2 は $l_i(u,v,z,w) = x_{11i}uz + x_{12i}uw + x_{21i}vz + x_{22i}vw \quad (i = 1, 2)$ である．

上の命題の右辺の変数を u, v に置き換える．このとき $-C_3u^2 + B_3uv - A_3v^2$ となるが，これは 2 次形式 $-A_3u^2 - B_3uv - C_3v^2$ と同値となる．このことを確かめるために

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u, v)h, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくことにする．この際，$h \in \mathrm{SL}(2)$ であることに注意する．計算により

$$\begin{aligned} -A_3\hat{u}^2 - B_3\hat{u}\hat{v} - C_3\hat{v}^2 &= -A_3(-v)^2 - B_3(-v)u - C_3u^2 \\ &= -C_3u^2 + B_3uv - A_3v^2 \end{aligned}$$

となるから $-C_3u^2 + B_3uv - A_3v^2 \sim -A_3u^2 - B_3uv - C_3v^2$ が得られる．よって

$$[-C_3u^2 + B_3uv - A_3v^2] = [-A_3u^2 - B_3uv - C_3v^2] = [-Q_3(x)]$$

となる．このことと命題 7.3 から次の系が導かれる．

系 7.5 $[Q_1(x)] \cdot [Q_2(x)] = [-Q_3(x)]$ がなりたつ．

上の系を使うと 2 変数 2 次形式の類の積が比較的簡単に計算できるようになる．詳しくはこの節の最後に述べる．

次の系は注 5.2 で指摘したように対称性を示すものである．

系 7.6 整 3-tensor x ($x \in V_{\mathbb{Z}}$) が原始的であるための必要十分条件は，
$Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ がすべて原始的となることである．

証明　十分性については明らかなので，必要性を示す．$x \in V_{\mathbb{Z}}$ が原始的であるから定義により $Q_1(x), Q_2(x)$ は，原始的となる．命題 7.3 によって $-C_3l_1^2 + B_3l_1l_2 - A_3l_2^2$ は原始的な 2 次形式 $Q_1(x)(u, v)$ と $Q_2(x)(z, w)$ の積で表されるので，$-C_3l_1^2 + B_3l_1l_2 - A_3l_2^2$ も原始的となる．したがって $\gcd(A_3, B_3, C_3) = 1$ となり $Q_3(x)$ も原始的である．□

これまで，対称群 $\mathfrak{S}_3$ から整 3-tensor $x (x \in V_{\mathbb{Z}}, \Delta(x) = D)$ への作用を定めた．この作用をもとにして整 3-tensor の類 $[x] \in V_D^*$ を定義する．そして定理 7.3 の写像 q による対応を用いて 2 次形式の類への作用も定めることにする．

定理 7.3 の写像 q により

$$V_D^* \longleftrightarrow \begin{array}{ll} (F_D^*)^2 & (D > 0 \text{ のとき}) \\ \{\pm 1\}^2 \times (F_D^*)^2 & (D < 0 \text{ のとき}) \end{array}$$

と対応している．

いま $\mathfrak{S}_3$ は $V_{\mathbb{Z}}$ へ作用していて Q_j を入れかえる．そこで W を原始的な整 3-tensor の集合とすると $W^\sigma \subset W \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_3)$，即ち W は作用で閉じている．一方で

$$\sigma(hx) = \sigma(h)\sigma(x) \quad (h \in H_{\mathbb{Z}}, x \in V_{\mathbb{Z}})$$

なので，$\mathfrak{S}_3$ は $V_{\mathbb{Z}}$ $(D \neq 0)$ にも作用する．この写像 q の同一視によって $D > 0$ のとき，$\mathfrak{S}_3$ から $(F_D^*)^2$ への作用．$D < 0$ のとき，$\mathfrak{S}_3$ から $\{\pm 1\}^2 \times (F_D^*)^2$ への作用が入る．

補題 7.7 $\nu = (132),\ \tau = (12)$ とおく．
$D > 0$ のとき，$\mathfrak{S}_3$ から $(F_D^*)^2$ への作用は

$$\tau(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\Lambda_2, \Lambda_1), \quad \nu(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\Lambda_2, \Pi\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}) \quad (\Pi\text{はある形式の負の類})$$

$D < 0$ のとき，$\mathfrak{S}_3$ から $\{\pm 1\}^2 \times (F_D^*)^2$ への作用は

$$\tau(\epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (\epsilon_2, \epsilon_1, \Lambda_2, \Lambda_1), \quad \nu(\epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2) = (\epsilon_2, -\epsilon_1\epsilon_2,\ \Lambda_2,\ \Lambda_1^{\epsilon_2}\Lambda_2^{\epsilon_1})$$

で与えられる．

証明　$\tau \in \mathfrak{S}_3$ に対して $Q_1(\tau(x)) = Q_2(x)$ となることが計算で簡単に確かめられる．
まず $D > 0$ の場合を示す．$(\Lambda_1, \Lambda_2) \in (F_D^*)^2$ に対応する V_D^* の類を $[x]$ $(x \in V_{\mathbb{Z}})$ とする．即ち $q([x]) = (\Lambda_1, \Lambda_2)$．定義から

$$\begin{aligned}\nu(\Lambda_1, \Lambda_2) &= q([\nu(x)]) = ([Q_1(\nu(x))], [Q_2(\nu(x))]) = ([Q_2(x)], [Q_3(x)]) \\ &= (\Lambda_2, [Q_3(x)])\end{aligned} \tag{7.8}$$

となる．したがって $[Q_3(x)]$ を Λ_1, Λ_2 で表すことを考える．系 7.5 により $[Q_1(x)] \cdot [Q_2(x)] = [-Q_3(x)]$ であるから，$[-Q_3(x)]$ と $[Q_3(x)]$ の違いをみてやればよい．そこで，$F = Q_3(x)$ とおいた上で次のようなものを考える．

定義 7.9 F_D^* の元 Π_D を $\Pi_D = [F] \cdot [-F]$ により定める．

Π_D は 2 変数 2 次形式 F によって定義されたが次の補題からわかるように他の 2 次形式（F と同値でなくてもよい）からでも Π_D が定まる．

補題 7.10 F_0 を判別式が $D (D > 0)$ であるような任意の 2 変数 2 次形式とする．このとき $\Pi_D = [F_0] \cdot [-F_0]$ をみたす．すなわち Π_D は 2 次形式 F_0 のとり方によらず一意に定まる．

これは，次のように確かめられる．F が原始的であるから補題 5.5 により $\hat{F} \sim F$ かつ $\hat{F_0} \sim F_0$ となるような互いに素の対 $(\hat{F}, \hat{F_0})$ が存在する．いま F と F_0 の判別式が等しいから補題 5.8 によって

$$Q_1(y) = F, \quad Q_2(y) = F_0$$

となるような $y \in \Omega$ が存在する．系 7.5 より $[Q_1(y)] \cdot [Q_2(y)] = [-Q_3(y)]$ が得られる．そこで，両辺に $\mathfrak{S}_3$ の元 $(132), (123)$ を作用させるとそれぞれ

$$[Q_2(y)] \cdot [Q_3(y)] = [-Q_1(y)] \tag{7.11}$$
$$[Q_3(y)] \cdot [Q_1(y)] = [-Q_2(y)] \tag{7.12}$$

となる．式 (7.11) から (7.12) を割ると $[Q_2(y)]\cdot[Q_1(y)]^{-1} = [-Q_1(y)]\cdot[-Q_2(y)]^{-1}$．したがって

$$\begin{aligned}\Pi_D &= [F]\cdot[-F] = [-Q_2(y)]\cdot[Q_2(y)] = [-Q_1(y)]\cdot[Q_1(y)]\\ &= [F_0]\cdot[-F_0]\end{aligned}$$

となる．□

　Π_D の性質の一つとして次のようなものがある．

注 7.13 判別式 D の値によらず，$\Pi_D^2 = 1$ となる．

補題 7.7 の証明に戻る．定義 7.9 の Π_D，系 7.5 を用いると $[Q_3(x)]$ は

$$\begin{aligned}[Q_3(x)] &= \Pi\cdot[-Q_3(x)]^{-1} = \Pi\cdot([Q_1(x)]\cdot[Q_2(x)])^{-1} = \Pi(\Lambda_1\Lambda_2)^{-1}\\ &= \Pi\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\end{aligned}$$

となる．したがって $D>0$ の場合が示された．

　次に $D<0$ の場合を示そう．ν の作用に関しては，ϵ_1,ϵ_2 の値に応じて 4 つの場合に分けて証明すればよい．そこで $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$ の場合についてのみ示すことにする．他の 3 つの場合は，同様に示せるので証明は省略する．まず，前と同じように $q([x]) = (1,-1,\Lambda_1,\Lambda_2)$ をみたすような $x\in V_{\mathbb{Z}}$ をとる．写像 q の定義から $Q_1(x)$ は正値，$Q_2(x)$ は負値を表していて $\Lambda_1 = [Q_1(x)],\ \Lambda_2 = [-Q_2(x)]$ をみたす．命題 7.3 により $Q_1(x)\cdot(-Q_2(x)) \sim Q_3(x)$ であるから $Q_3(x)$ も正値となる．したがって (7.3) と同じ考察をすることで

$$\nu(1,-1,\Lambda_1,\Lambda_2) = (-1,1,\Lambda_2,[Q_3(x)])$$

が得られる．いま $[Q_3(x)]$ が Λ_1,Λ_2 で表せることを確かめよう．命題 7.3 の式 (7.4) を用いると

$$(A_1u^2 + B_1uv + C_1v^2)\cdot -(A_2z^2 + B_2zw + C_2w^2) = C_3l_1^2 - B_3l_1l_2 + A_3l_2^2 \tag{7.14}$$

と表すことができる．しかし上の式は，direct composition identity ではない．これを修正するために双線形形式 l_1,l_2 を少し変更させる．$\hat{l}_1,\hat{l}_2$ をそれぞれ l_1,l_2 の変数 v を $-v$ に置き換えて得られる双線形形式とする．すなわち $\hat{l}_1,\hat{l}_2$ を

$$\hat{l}_1(u,v;z,w) = l_1(u,-v;z,w),\quad \hat{l}_2(u,v;z,w) = l_2(u,-v;z,w)$$

とおく．このとき式 (7.14) の変数 v を $-v$ に置き換えると

$$(A_1u^2 - B_1uv + C_1v^2)\cdot -(A_2z^2 + B_2zw + C_2w^2) = C_3\hat{l}_1^2 - B_3\hat{l}_1\hat{l}_2 + A_3\hat{l}_2^2$$

となる．この式は direct なので，定義から

$$\Lambda_1^{-1}\Lambda_2 = [C_3u^2 - B_3uv + A_3v^2] = [Q_3(x)]$$

が得られる．このようにして

$$\nu(1,-1,\Lambda_1,\Lambda_2) = (-1,1,\Lambda_2,\Lambda_1^{-1}\Lambda_2)$$

が示される．□

$\mathfrak{S}_3$ の作用で不変な元を次のように定義する．

定義 7.15 x を整 3-tensor $(x \in V_{\mathbb{Z}})$ とする．x が対称群 $\mathfrak{S}_3$ の作用で不変，つまり $\sigma(x) = x \quad (\forall\sigma \in \mathfrak{S}_3)$ となるとき，x は対称であるという．

V_D^* の類についても同様に $\mathfrak{S}_3$ の作用で不変な類を対称であるという．

次の定理は２つ目の主定理である．

定理 7.16 （主定理）

V_D^* の対称な類の個数は，３乗して１となる V_D^* の類の個数 $(\#\{\Lambda \in F_D^* \mid \Lambda^3 = 1\})$ に等しい．また，すべての対称な類は，対称な 3-tensor を含む．

証明　まず前半を示す．$D > 0$ の場合を示す．$[x]$ を V_D^* の対称な類とする．このとき写像 q の像 $([Q_1(x)],[Q_2(x)]) = (\Lambda_1,\Lambda_2)$ も $\mathfrak{S}_3$ の作用で不変な $(F_D^*)^2$ の元となる．したがって補題 (7.7) によって $\Lambda_1 = \Lambda_2$，$\Lambda_1^3 = \Pi_D$ が得られる．よって

$$\{V_D^*\text{の対称な類}\} \cong \{(\Lambda_1,\Lambda_1) \in (F_D^*)^2 \mid \Lambda_1^3 = \Pi_D\}$$

となる．そこで対応 $\Lambda_1 \longrightarrow \Pi\Lambda_1 = \Lambda$ をとると明らかに１対１対応となり

$$\{(\Lambda_1,\Lambda_1) \in (F_D^*)^2 \mid \Lambda_1^3 = \Pi\} \cong \{(\Lambda,\Lambda) \in (F_D^*)^2 \mid \Lambda^3 = 1\}$$

が得られる．$D < 0$ の場合も同様に示せる．このときは

$$\{V_D^*\text{の対称な類}\} \cong \{(-1,-1,\Lambda,\Lambda) \in \{\pm 1\}^2 \times (F_D^*)^2 \mid \Lambda_1^3 = \Pi_D\}$$

となる．

次に，すべての対称な類が対称な 3-tensor を含むことを示す．まず記号を準備する．判別式 D で $\Delta(x) \neq 0$ となる整 3-tensor x（V の semi-stable point）に対して H_x を x の stabilizer とする．このとき 4 節の (4.8) でおいた x_0 を使うと

$$H_{x_0} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\lambda_1\lambda_2)^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \right) \middle| \lambda_1\lambda_2 \neq 0 \right\} \tag{7.17}$$

が群スキームとして得られる．

$x \in V_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{ss}}$，$(c_1,c_2,c_3) \in H_{x\mathbb{Z}}$ とおく．このとき $gx = x_0$ をみたす $g \in G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ が存在する．いま $g(c_1,c_2,c_3)g^{-1} \in H_{x_0\overline{\mathbb{Q}}}$ だから $g(c_1,c_2,c_3)g^{-1}$ は (7.17) の形で与えられる．ただし $\lambda_1,\lambda_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ である．　そこで

$$\Gamma(c_1) = \{\lambda_1,\lambda_1^{-1}\},\ \Gamma(c_2) = \{\lambda_2,\lambda_2^{-1}\},\ \Gamma(c_3) = \{(\lambda_1\lambda_2)^{-1},\lambda_1\lambda_2\}$$

とおくことにする．

いまから後半の証明をする．$D=-3$ の場合，判別式が D の 2 次体を考えたとき $\lambda^3=1$ となるような Order の単元 $\lambda\neq 1$ がないとは限らない．そこでまず $D=-3$ の場合について述べる．その後に $D\neq -3$ について証明する．その際，次のことを使う．

条件 7.18 $\lambda^3=1$ ならば $\lambda=1$

$D=-3$ の場合について $F_{\mathrm{prim},D}$ に対応する 2 次体，およびその Order はそれぞれ $\mathbb{Q}(\omega)$，$\mathbb{Z}(\omega)\quad(\omega^3=1,\omega\neq 1)$ となる．$D<0$ より 2 次体 $\mathbb{Q}(\omega)$ の類数と Order $\mathbb{Z}(\omega)$ の狭義のイデアル類は等しい．したがって定理 3.7 により F_D^* の類の個数は 1 個となる．ゆえに対称な 3-tensor y の存在をいえば十分である．求める $y\in V_D^*$ として

$$M_y(u,v)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}v$$

をとる．このとき y は対称で，$D=\Delta(y)=-3$ となる．

次に $D\neq -3$ の場合について証明する．いま $[x]\in V_D^*$ を対称な類とする．このとき $y\sim x$ となるような対称な 3-tensor y があることをいえばよい．$[x]$ の対称性からある $h=(h_1,h_2,h_3)\in H_{\mathbb{Z}}$ が存在して $\nu(x)=hx\quad(\nu=(132)\in\mathfrak{S}_3)$ と表すことができる．そこで両辺に ν^2 を作用させて計算すると

$$\begin{aligned}x&=\nu^3(x)=\nu^2(\nu(x))=\nu^2(hx)=\nu^2(h)\nu^2(x)\\&=\nu^2(h)\nu(\nu(x))=\nu^2(h)\nu(hx)=\nu^2(h)\nu(h)\nu(x)\\&=\nu^2(h)\nu(h)hx\end{aligned}$$

となる．したがって $\nu^2(h)\nu(h)h\in H_{x\mathbb{Z}}$ である．$\nu^2(h)\nu(h)h=(c_1,c_2,c_3)$ とおく．このとき $c_1=h_3h_2h_1$, $c_2=h_1h_3h_2$, $c_3=h_2h_1h_3$ となる．明らかに c_1,c_2,c_3 は互いに共役であるから $\Gamma(c_1)=\Gamma(c_2)=\Gamma(c_3)$ となる．よって $\{\lambda_1,\lambda_1^{-1}\}=\{\lambda_2,\lambda_2^{-1}\}=\{(\lambda_1\lambda_2)^{-1},\lambda_1\lambda_2\}$ であることから $\lambda_1^3=\lambda_2^3=1$ が得られる．したがって c_1,c_2,c_3 は $\mathrm{GL}(2)_{\bar{\mathbb{Q}}}$ の中で単位行列と共役になるから $c_1=c_2=c_3=1$ となる．特に $h_2h_1h_3=1$ である．そこで $h'=(h_3^{-1},h_2,1)\in H_{\mathbb{Z}}$ とし 3-tensor y を $y=h'x$ とおくことにする．このとき

$$\begin{aligned}\nu(y)&=\nu(h')\nu(x)=\nu(h')hx\\&=\nu(h')h(h')^{-1}y\end{aligned}$$

となる．いま簡単な計算によって $\nu(h')h(h')^{-1}=1$ となることを確かめることができる．ゆえに y は対称な 3-tensor で $y\sim x$ となる．□

本論の最後に，一つ目の主定理で示した写像 q を使うと 2 変数 2 次形式の類の積が簡単になることを説明する．定義に従って計算しようとすると 7 節の冒頭で定義した composition identity を考えなければならないから複雑になるのは明白である．だから別のやり方で簡単に積を求めることが必要になる．そこで次のような方法を考える．判別式 D の符号が違っても考え方は同じだから $D>0$ とする．Λ_1,Λ_2 を判別式が D の

原始的な整２変数２次形式の類とする．このとき積 $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ を求めるわけだが，そのために代表元として $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{prim},D}$ で $[F_1] = \Lambda_1$, $[F_2] = \Lambda_2$ となるものをとる．ただし $\mathcal{F}_{\mathrm{prim},D}$ は判別式が D の原始的な整２変数２次形式の集合を表す．F_1, F_2 は原始的であるから補題 5.5 によって (F_1, F_2) は互いに素であるとしてよい．いま F_1 と F_2 の判別式が等しいから補題 5.8 によってある 3-tensor x が存在して $Q_1(x) = F_1$, $Q_2(x) = F_2$ となる．そこで系 7.5 の式 $[Q_1(x)] \cdot [Q_2(x)] = [-Q_3(x)]$ を使うと

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 &= [F_1] \cdot [F_2] = [Q_1(x)] \cdot [Q_2(x)] \\ &= [-Q_3(x)]\end{aligned}$$

となる．このようにして２変数２次形式の積を簡単に計算することができるのである．その意味で，一つ目の主定理は簡単な２変数２次形式の類の積のアルゴリズムを与えていると言ってもよいのである．

参考文献

[1] Anthony C.Kable “Classes of integral 3-tensors on 2-space” MATHEMATIKA, 47(2000),205-217

[2] 雪江明彦著「概均質ベクトル空間の有理軌道分解」（レクチャーノート 2000 年） http://www.math.tohoku.ac.jp/ yukie/index-j.html

[3] Kable,A.C and A.Yukie. Prehomogeneous vector space and field extensions II. Invent.Math.130:315-344, 1997

[4] M.Sato and T.Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector space and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65(1977),1-155

[5] 佐々木義雄訳「整数論」上巻（吉岡書店 1971 年）

[6] Gauss, C.F. Disquisitiones arithmeticae. Yale University Press, New Haven, London, 1966.

[7] 河田敬義著「数論　」岩波講座　基礎数学（岩波書店 1978 年）

[8] 河田敬義著「数論　」岩波講座　基礎数学（岩波書店 1978 年）