可解性について

方程式が可解であることをどう定義するかだが，1 のべき根のことをどう考えるかということがしばしば問題になる．私個人の結論としては 1 のべき根も加えて考えるのがよいということである．例えば 1 のべき根が実部と虚部が実数の根号をとることを繰り返して得られるかということを考えてみると証明したわけではないが，多分それは無理なのである．例えば，$2\cos 2\pi/7$ を考えると，これは

$$x^3 + x^2 - 2x - 1$$

の根である．根の公式を適用すると，

$$A = -18 - 2 + 27 = 7,\ B = 1 + 6 = 7.$$

よって，解は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{49-4\cdot 7^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{49-4\cdot 7^3}}{2}} - 1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21\sqrt{-3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-21\sqrt{-3}}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

ただし三乗根は積が 7 になるように選ぶ．

$2\cos 2\pi/7$ は実数だが，これが複素数の根号で与えられていても，実数の根号で表されるわけではないのである．$\sqrt[3]{(7+21\sqrt{-3})/2}$ の実部と虚部を求めようとすると，$(7+21\sqrt{-3})/2$ の絶対値は $7^{3/2}$ でこれはべき根だが，

$$\frac{7+21\sqrt{-3}}{2} = 7^{3/2}(\cos\theta_0 + \sin\theta_0)$$

として $t = \cos\theta_0/3$ と $\sin\theta_0/3$ を求めなければならない．しかし加法定理を使うと，

$$4t^3 - 3t = \cos\theta_0 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

となる．この方程式は $t, \cos((\theta_0+2\pi)/3), \cos((\theta_0+4\pi)/3)$ と 3 つの実数解を持つ．すると判別式は正で，解の公式を使うと，3 乗根の中の平方根は虚数である．よって，また複素数の 3 乗根をとることになり，どうどうめぐりになる．だから 1 のべき根は 1 のべき根としてそのままにしておくのがよいと思う．

どちらにせよ，5 次以上の方程式は 1 のべき根を加えてもべき根で表せないので，非可解性に問題はないのである．