

保型形式の  $L$  級数の臨界帯領域の中心での値につ  
いて

青崎長運

平成27年2月5日

## 目次

1	はじめに	2
2	保型形式の定義	5
3	半整数ウェイトの保型形式	10
4	主定理の記述	15
5	主定理の証明	18
6	命題 5.13 の証明	26

# 1 はじめに

本論文は Kohnen と Zagier による論文 [4] の解説論文である.

まず本論文で用いる記号の定義を行う.  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  でそれぞれ自然数の集合, 整数の集合, 有理数の集合, 複素数の集合を表す.

整数  $a, b$  に対して最大公約数を  $(a, b)$  で表す. 正の整数  $N$  と  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$  に対して  $m_1 \equiv a_1, m_2 \equiv a_2 \pmod{N}$  が成り立つとき  $\mathbf{m} \equiv \mathbf{a} \pmod{N}$  と表す.  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $[x]$  を  $[x] = \text{Max} \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  と定める. 正の整数  $n, k$  に対して  $\sigma_k(n)$  を

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

と定義する. また  $s \in \mathbb{C}$  に対してリーマンゼータ関数を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定める. このとき  $\zeta(s)$  は  $\text{Re}(s) > 1$  で絶対収束する.

$i$  で虚数単位を表し,  $z \in \mathbb{C}$  を  $z = x + iy$  と表す. またこのとき  $\text{Re}(z) = x, \text{Im}(z) = y$  と定める.  $z$  の複素共役を  $\bar{z}$  で表し  $\bar{z} = x - iy$  とする.  $\mathbb{C}$  の上半平面を

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

で表す.  $e$  をネイピア数とする. このとき

$$q = e^{2\pi iz}$$

とする. また  $N$  を正の整数とすると

$$q_N = e^{\frac{2\pi iz}{N}}, \xi_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

と定める.  $d$  を平方因子を持たない整数とする. このとき

$$D = \begin{cases} d & (d \equiv 1 \pmod{4}) \\ 4d & (d \equiv 2, 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

を二次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  の基本判別式という. ただし  $d = 1$  の場合は  $D = 1$  とする.

整数成分を持つ二次の正方行列全体と有理数成分を持つ二次の正方行列全体それぞれを

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$M_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

と定める.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して行列式を  $\det A = |A| = ad - bc$  で定める.  $M_2(\mathbb{Z})$  の部分集合  $GL_2(\mathbb{Z})$  と  $SL_2(\mathbb{Z})$  を,

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{Z}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid |A| \neq 0\}, \\ SL_2(\mathbb{Z}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid |A| = 1\} \end{aligned}$$

として定める. 同様に  $M_2(\mathbb{Q})$  の部分集合  $GL_2(\mathbb{Q})$  と  $GL_2^+(\mathbb{Q})$  を,

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{Q}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid |A| \neq 0\}, \\ GL_2^+(\mathbb{Q}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid |A| > 0\}. \end{aligned}$$

と定める.

ここで, 論文 [4] の概要とその動機について述べる. 保型形式等の定義は二章以降で詳細に記述することとする. 論文 [4] の概要は以下のようなものである.

保型形式  $g(z)$  とその志村対応  $f(z)$ , また  $f(z)$  に対応するツイストされた  $L$  関数  $L(f, D, s)$  を考える. このとき  $g(z)$  のフーリエ係数と  $L(f, D, s)$  の関係を具体的に記述することが出来る.

論文 [4] が書かれた背景について触れる. 当時保型形式に関する結果として次のようなものが知られていた. このことについては Gross と Zagier による論文 [1] を参照.

**定理 1.1.**  $L(f, s)$  の関数等式の中心  $s = k$  での値は完全平方になる.

また Shimura の論文 [6] によって次のことも分かっていた.

**定理 1.2.**  $g$  は半整数ウェイトの保型形式でヘッケ作用素の同時固有形式であるとし,  $f$  をその志村対応とする. また  $c(n)$  を  $g$  の  $n$  番目のフーリエ係数とする. このときもし  $n/m$  が平方数ならば  $c(n)$  と  $c(m)$  の比は  $f$  のフーリエ係数によって表わされる.

しかしこれらの結果についての自然な疑問としてそれぞれ「何故平方数が出てくるのか?」「 $n/m$  が平方数でないときはどうなるのか?」というものがある. これに対する答えとして Waldspurger は [7] で次のようなことを発見した.

**定理 1.3.**  $f$  と  $g$  を先ほどと同様のものとする.  $n$  が平方因子を持たない正の整数とすると, このとき  $c(n)^2$  は本質的には二次体の指標による  $L(f, s)$  のツイストの  $s = k$  での値である

しかし Waldspurger の論文はやや難易度が高く, また  $L$  関数と  $c(n)^2$  の間の具体的な比例定数がどうなっているかは分からないという問題があった. そこで  $SL_2(\mathbb{Z})$  上の保型形式の特別な場合に限り  $L$  関数と  $c(n)^2$  の間の具体的な関係を記述することを目標として論文 [4] は書かれたのである.

さて,次に本論文の構成について述べる.まず第二章では基本となる整数ウェイトの保型形式とその重要な具体例であるアイゼンシュタイン級数を導入する.続く第三章では半整数ウェイトの保型形式について定義する.その次の第四章で志村の定理の紹介をして論文 [4] の主定理を具体的に記述する.そして第五章で [3] のいくつかの結果を用いて主定理の証明を行う.最後の章で主定理を示す際に一旦認めた命題 5.13 を示すことにする.

## 謝辞

本修士論文を書くにあたって二年間お忙しい中ご指導ご鞭撻を頂いた雪江明彦先生に心から深く感謝申し上げます.

## 2 保型形式の定義

この章では  $SL_2(\mathbb{Z})$  上の保型形式について定義をしていく. また重要な具体例であるアイゼンシュタイン級数についても触れることとする. なおこの章と次の章の命題の証明に関しては基本的に Koblitz の本 [2] に記載されている. 各命題に [2] の該当するページを書いておくので読む際の参考にして頂きたい.

まず始めに  $SL_2(\mathbb{Z})$  とその重要な部分群である  $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$  を定義する. なお, 本論文では  $k$  は自然数として扱う.

**定義 2.1.**  $\Gamma, \Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$  を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\Gamma &= SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \mid |\gamma| = 1 \right\}, \\ \Gamma_0(N) &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_1(N) &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma(N) &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) \mid b \equiv 0 \pmod{N} \right\}.\end{aligned}$$

また,  $\Gamma(N)$  を含む  $\Gamma$  の部分群を  $\Gamma$  のレベル  $N$  の合同部分群と呼ぶ.

次に  $\Gamma$  の  $\mathbb{H}$  への作用を定義し, カスプと基本領域を定義する.

**定義 2.2.**  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, z \in \mathbb{C}$  に対して,

$$\begin{aligned}\gamma z &= \frac{az+b}{cz+d}, \\ \gamma \infty &= \frac{a}{c} = \lim_{z \rightarrow \infty} \gamma z\end{aligned}$$

と定める. また,  $cz+d=0$  なら  $\gamma z = \infty$  と定める.

このとき定義より  $\gamma(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}, \gamma(\mathbb{Q} \cup \infty) = \mathbb{Q} \cup \infty$  なので  $\Gamma$  は  $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \infty$  に作用していることに注意する.

**定義 2.3.** 集合  $S$  に対して群  $G$  が作用しているとき,  $S$  の二点  $s_1, s_2$  が同じ軌道にあるならば  $s_1$  と  $s_2$  は  $G$  同値であるという.

また,  $F$  を  $\mathbb{H}$  内の閉領域とする.  $\mathbb{H}$  のどの点  $z$  も  $F$  のある適当な点に  $G$  同値であるが,  $F$  の相異なるどの二つの内点も  $G$  同値になることがないという条件を満たすとき,  $F$  を  $\Gamma$  の部分群  $G$  に対する基本領域という.

**定義 2.4.** 点  $c \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  をカスプと呼ぶ. このとき任意の既約分数  $a/c$  に対して  $\gamma_\infty = a/c$  を満たす  $\gamma \in \Gamma$  が存在するので全ての有理数は  $\infty$  と同じ  $\Gamma$  同値類に属する.  $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の部分群とするとカスプの集合  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  の各  $\Gamma'$  同値類も  $\Gamma'$  のカスプと呼ぶ.

$\Gamma'$  が合同部分群ならば定義より  $[\Gamma : \Gamma']$  は有限なのでカスプの数も有限であることに注意する.

次にこれらの記号を用いて  $SL_2(\mathbb{Z})$  及び部分群  $\Gamma_0(N)$  の保型形式とカスプ形式を定義していく. この論文を通して特に断りのない限り関数  $f(z), g(z)$  は上半平面  $\mathbb{H}$  上の正則関数であるものとする.

**定義 2.5.**  $\mathbb{H}$  上の正則関数  $f(z)$  と  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対して  $f(z)|[\gamma]_k$  を以下のように定める.

$$\begin{aligned} f(z)|[\gamma]_k &= (cz+d)^{-k} f(\gamma z) \\ &= (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right). \end{aligned}$$

**定義 2.6.**  $f(z)$  が任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f(z)|[\gamma] = f(z)$  を満たすとする. このとき  $f(z)$  はフーリエ展開を持つ. ここで全てのカスプでのフーリエ展開に対して負べきの項が 0 になるとき,  $f(z)$  を  $\Gamma$  に対するウエイト  $k$  の正則保型形式と言う. また, さらに全てのカスプで定数項も 0 になるとき,  $f(z)$  を  $\Gamma$  に対するウエイト  $k$  のカスプ形式という. 例えばカスプ  $\infty$  では,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

というフーリエ展開を持つ.  $\Gamma$  に対する正則保型形式, カスプ形式全体からなる集合をそれぞれ  $M_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$  と定義する.

ただし本論文では正則保型形式のことを単に保型形式と呼ぶことが多いので注意する.  $\Gamma$  に対する保型形式の重要な例としてアイゼンシュタイン級数を導入する.

**定義 2.7.**  $k$  を 2 より大きい偶数とすると,  $z \in \mathbb{H}$  に対しアイゼンシュタイン級数  $G_k(z)$  を以下のように定める.

$$G_k(z) = \frac{\zeta(1-k)}{4\zeta(k)} \sum'_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

ただし和は  $(0,0)$  を除く全ての整数の組を渡る.

次の命題は  $G_k(z)$  についての基本的な命題である. 証明は [2, Koblitz, pp.109 - 111] を参照.

**命題 2.8.**  $G_k(z)$  は  $\mathbb{H}$  上で絶対収束し,  $\mathbb{H}$  上の正則関数となる. そして  $G_k(z) \in M_k(\Gamma)$  である. また  $G_k(z)$  は次のようなフーリエ展開を持つ.

$$G_k(z) = \frac{1}{2} \zeta(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

さて, 次に合同部分群に関する保型形式について定義する.

**定義 2.9.**  $\Gamma'$  をレベル  $N$  の合同部分群とする. 任意の  $\gamma \in \Gamma'$  に対して,

$$f(z)|[\gamma]_k = f(z)$$

が成り立つとする. また任意の  $\gamma_0 \in \Gamma$  に対して,

$$f(z)|[\gamma_0]_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$$

という展開を持つとする. このとき  $f(z)$  を  $\Gamma'$  に関する正則保型形式と言う. また上の展開において全てのカスプで常に  $a_0 = 0$  であるとき  $f(z)$  を  $\Gamma'$  のカスプ形式であると言う.  $\Gamma'$  に関する正則保型形式, カスプ形式全体からなる集合を  $M_k(\Gamma')$ ,  $S_k(\Gamma')$  と書く.

合同部分群に対する保型形式に関する次の命題は有用である. 証明は [2, Koblitz, pp.127 - 129, 144-147] を参照.

**命題 2.10.**  $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の合同部分群とし,  $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$  とする. また  $\Gamma'' = \alpha^{-1}\Gamma'\alpha \cap \Gamma$  とおく. このとき  $\Gamma''$  は  $\Gamma$  の合同部分群であり, 写像  $f \rightarrow f|[\alpha]_k$  は  $M_k(\Gamma')$  を  $M_k(\Gamma'')$  へ, また  $S_k(\Gamma')$  を  $S_k(\Gamma'')$  へうつす. また,  $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  で  $g(z) = f(Mz)$  ならば  $g(z) \in M_k(\Gamma_0(MN), \chi)$  である.

合同部分群の保型形式の例としてレベル  $N$  のアイゼンシュタイン級数を導入する.

**定義 2.11.**  $k$  を 2 より大きい正の整数とする.  $N$  を正の整数とし,  $\underline{a} = (a_1, a_2)$  を  $N$  を法とする整数の組とする.  $\underline{m} = (m_1, m_2)$  で整数の組を表すものとする. このとき  $z \in \mathbb{H}$  に対してレベル  $N$  のアイゼンシュタイン級数を次のように定める.

$$G_k^{\underline{a}}(z) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}, \underline{m} \equiv \underline{a} \pmod{N}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k}.$$

ただし  $\underline{a} = (0, 0)$  の場合, 和の中から  $\underline{m} = (0, 0)$  に対する項を除くものとする.

次の二つの命題はレベル  $N$  のアイゼンシュタイン級数が正則保型形式になっていること, その具体的な  $q_N$  展開についてである. 証明は [2, Koblitz, pp.131 - 134] を参照.

**命題 2.12.**  $G_k^{\underline{a}} \in M_k(\Gamma(N))$  である. また,  $G_k^{(0, a_2)} \in M_k(\Gamma_1(N))$  である.

部分ゼータ関数  $\zeta^a(s)$  を

$$\zeta^a(s) = \sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \equiv a \pmod{N}}} n^{-s}$$

と定めると, これは  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で収束する. この部分ゼータ関数を用いて次の命題が成り立つ.

**命題 2.13.**  $c_k = (-2\pi i)^k / \{N^k(k-1)!\}$  とする. また  $b_{0,k}^a$  を  $a_1 \neq 0$  のとき  $b_{0,k}^a = 0$  とし,  $a_1 = 0$  のとき  $b_{0,k}^a = \zeta^{a_2}(k) + (-1)^k \zeta^{-a_2}(k)$  として定める. このときレベル  $N$  のアイゼンシュタイン級数の  $q_N$  展開を以下のように表すことが出来る.

$$G_k^a(z) = b_{0,k}^a + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,k}^a q_N^n.$$

ただし

$$b_{n,k}^a = c_k \left( \sum_{j|n, n \equiv ja_1} j^{k-1} \xi^{ja_2} + (-1)^k \sum_{j|n, n \equiv -ja_1} j^{k-1} \xi^{-ja_2} \right)$$

とする.

最後にディリクレ指標について定義した後, 指標付きの保型形式について述べてこの章を終わることとする.

**定義 2.14.**  $n, m \in \mathbb{Z}$  とし,  $N$  を正の整数とする.  $\chi$  が整数から複素数への関数で, 以下の条件を満たすとき  $\chi$  を  $N$  を法とするディリクレ指標という.

- $n \equiv m \pmod{N}$  ならば  $\chi(n) = \chi(m)$ .
- $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ .
- $\chi(1) = 1$ .
- $n$  と  $N$  が互いに素でなければ  $\chi(n) = 0$ .

また  $N$  の約数  $M$  と,  $M$  を法とするディリクレ指標  $\rho_M$  に対して

$$\rho_M(n) = \chi(n) (\forall n, (n, N) = 1)$$

が成り立つとき  $\chi$  は  $\rho_M$  から導かれる指標であるという. このような  $\rho_M$  を与える  $N$  の約数  $M$  の中で, 最小のものを  $\chi$  のコンダクターと呼ぶ. また  $\chi$  のコンダクターが  $N$  であるとき,  $\chi$  は  $N$  を法とする原始的なディリクレ指標であるという.

ディリクレ指標の例として拡張されたヤコビ記号とクロネッカー記号を定義する.

**定義 2.15.** (拡張されたヤコビ記号)

素数  $p$  と整数  $n$  に対して  $\chi_p(n)$  を

$$\chi_p(n) = \begin{cases} 1 & ((n, p) = 1, n \equiv x^2 \pmod{p} \text{ となる } x \text{ が存在}) \\ -1 & ((n, p) = 1, n \equiv x^2 \pmod{p} \text{ となる } x \text{ が存在しない}) \\ 0 & ((n, p) > 1) \end{cases}$$

と定める. 正の整数  $m$  に対して  $m = p_1 \cdots p_l$  を  $m$  の素因数分解とするとき,

$$\chi_m(n) = \chi_{p_1}(n) \cdots \chi_{p_l}(n)$$

と定める. また負の整数  $m$  に対しては,

$$\chi_m(n) = \begin{cases} \chi_{|m|}(n) & (n > 0) \\ -\chi_{|m|}(n) & (n < 0) \end{cases}$$

と定める. こうして整数  $m$  について定められた  $\chi_m$  を拡張されたヤコビ記号ということにする.

定め方から拡張されたヤコビ記号  $\chi_m$  は  $|m|$  を法とするディリクレ指標になっている.

**定義 2.16.** (クロネッカー記号)

$D$  を二次体の基本判別式とするとき,  $\left(\frac{D}{a}\right)$  を以下のように定める. ただし  $a \in \mathbb{Z}$  とする.

- $(a, D) > 1$  ならば  $\left(\frac{D}{a}\right) = 0$ .
- $\left(\frac{D}{1}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{D}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & (D > 0), \\ -1 & (D < 0) \end{cases}$  である.
- $D$  が奇数ならば,  $\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{cases} 1 & (D \equiv 1 \pmod{8}), \\ -1 & (D \equiv 5 \pmod{8}) \end{cases}$  である.
- $p$  が奇素数で  $D$  と互いに素なとき,

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (x^2 \equiv D \pmod{p} \text{ を満たす } x \text{ が存在}), \\ -1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である.

- $a > 0$  が  $D$  と互いに素で  $a = p_1 \cdots p_n$  を素因数分解とするとき,

$$\left(\frac{D}{\pm a}\right) = \left(\frac{D}{\pm 1}\right) \left(\frac{D}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{D}{p_n}\right) \text{ (複合同順).}$$

このとき  $\left(\frac{D}{-}\right)$  をクロネッカー記号と言う。

クロネッカー記号は原始的なディリクレ指標になっている。この命題の証明及びその他の性質については雪江の本 [11] の 85 ページから 98 ページに詳しい。

**命題 2.17.** 上の定義の下で  $\left(\frac{D}{-}\right)$  は  $|D|$  を法とする原始的なディリクレ指標である。

クロネッカー記号のガウス和についての性質も重要である。 $\xi = e^{\frac{2\pi i}{|D|}}$  とする。正の整数  $N$  を法とするディリクレ指標  $\chi$  に対して  $g_j(\chi) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi(n)\xi^{jn}$  を  $\chi$  のガウス和と言う。

**命題 2.18.** クロネッカー記号のガウス和について、

$$\sum_{n=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) \xi^{jn} = \left(\frac{D}{j}\right) \sqrt{D}$$

が成り立つ。

この命題については高木の本 [10] の巻末部分に詳しい。  
準備が出来たので指標付きの保型形式を定義する。

**定義 2.19.**  $\chi$  を  $N$  を法とするディリクレ指標とすると、 $M_k(\Gamma_1(N))$  の部分空間  $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$  と  $S_k(\Gamma_1(N))$  の部分空間  $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma_0(N), \chi) &= \left\{ f(z) \in M_k(\Gamma_0(N)) \mid \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \quad f|[\gamma] = \chi(d)f \right\}, \\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) &= S_k(\Gamma_1(N)) \cap M_k(\Gamma_0(N), \chi). \end{aligned}$$

指標付きの保型形式については次の命題が重要かつ基本的である。証明は [2, Koblitz, pp.137 - 138] を参照。

**命題 2.20.** 上の定義の下で以下が成り立つ。

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus M_k(\Gamma_0(N), \chi).$$

ただし和は  $N$  を法とするディリクレ指標全体をわたるものとする。

### 3 半整数ウェイトの保型形式

前章では整数ウェイトの場合の保型形式を考えたが、この章では正の整数  $k$  に対してウェイトが半整数  $k/2$  の場合の保型形式について考える。まず準備として  $GL_2^+(\mathbb{Q})$  の被覆群を考える。

**定義 3.1.**  $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q}), t \in \{\pm 1\}$  とする.  $\alpha$  に対し  $\mathbb{H}$  上の正則関数  $\phi(z)$  で,

$$\phi(z)^2 = t \frac{cz+d}{\sqrt{\det \alpha}}$$

となるものを考える. このとき集合  $G$  を上の条件を満たす  $\alpha$  と  $\phi(z)$  の組  $(\alpha, \phi(z))$  全体からなる集合として定める.

**命題 3.2.**  $(\alpha, \phi(z)), (\beta, \psi(z)) \in G$  に対して,

$$(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z)) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z))$$

で演算を定めると  $G$  は群になる.

証明は [2, Koblitz,p179] を参照. 次にこの  $G$  の部分集合を用いて作用素  $[\alpha']_{\frac{k}{2}}$  を定義する.

**定義 3.3.**  $\alpha' = (\alpha, \phi(z)) \in G (\alpha \in SL_2(\mathbb{Z}))$  であるとする. このとき  $f(z)$  への作用素  $[\alpha']_{\frac{k}{2}}$  を次のように定める.

$$f(z)|[\alpha']_{\frac{k}{2}} = f(\alpha z)\phi(z)^{-k}.$$

このとき  $G$  の演算の定め方から  $(f(z)|[\alpha']_{\frac{k}{2}})|[\beta']_{\frac{k}{2}} = f(z)|[\alpha'\beta']_{\frac{k}{2}}$  が成り立つことに注意しておく. 次に半整数ウエイトの保型形式を定義する上で重要な保型因子を定義する.

**定義 3.4.**  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4), z \in \mathbb{H}$  に対して  $j(\gamma, z)$  を以下のように定める.

$$j(\gamma, z) = \chi_c(d)\varepsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d}.$$

ただしここで  $\chi_c(d)$  は拡張されたヤコビ記号を表わし,  $\varepsilon_d$  は

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \pmod{4}) \\ i & (d \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

と定める.

この  $j(\gamma, z)$  を用いて  $\tilde{\Gamma}'$  を定義する.

**定義 3.5.**  $\Gamma' \subset \Gamma_0(4)$  とし,  $j(\gamma, z)$  は上で定義したものとする. このとき  $\tilde{\Gamma}'$  を次のように定義する.

$$\tilde{\Gamma}' = \{(\gamma, j(\gamma, z)) | \gamma \in \Gamma'\}.$$

また  $\gamma \in \Gamma'$  に対して  $\tilde{\gamma} = (\gamma, j(\gamma, z))$  と表すことにする.

次の命題は [2, Koblitz, p180] による.

**命題 3.6.**  $\tilde{\Gamma}'$  と  $\Gamma'$  は群として同系である.

さて, 保型形式の定義をする最後の準備としてカスプでの正則について述べる. まず  $f(z)$  は任意の  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}'$  に対して  $f(z)|[\tilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}} = f(z)$  を満たすものとする. 次に  $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対し,  $\alpha$  を  $s = \alpha\infty$ ,  $\alpha \in \Gamma$  となるように定める. また第一成分が  $\alpha$  となるような  $G$  の任意の元  $\alpha' = (\alpha, \phi(z))$  を一つとる.  $g(z) = f(z)|[\alpha']_{\frac{k}{2}}$  と置くと, このとき任意の  $\pm\alpha'^{-1}\tilde{\gamma}\alpha' \in \pm\alpha'^{-1}\tilde{\Gamma}'\alpha'$  に対して,

$$g|[\pm\alpha'^{-1}\tilde{\gamma}\alpha']_{\frac{k}{2}} = f|[\tilde{\gamma}\alpha']_{\frac{k}{2}} = f|[\alpha']_{\frac{k}{2}} = g$$

が成り立つ. このとき  $\tilde{\Gamma}'_s = \{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}' | \gamma s = s\}$  とするとある 1 の 4 乗根  $t$  と正の整数  $h$  に対し,

$$\pm\alpha'^{-1}\tilde{\Gamma}'_s\alpha' = \left\{ \pm \left( \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right)^j \mid j \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立つことに注意する. するとこのとき  $g$  は  $\left[ \left( \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right) \right]_{\frac{k}{2}}$  の下で不変となるので

$$g(z) = g(z) \left[ \left( \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \right) \right]_{\frac{k}{2}} = t^{-k} g(z+h)$$

である. ここで  $t^k = e^{2\pi ir}$ , ただし  $r = 0, 1/4, 1/2, 3/4$  と書き表す. すると  $e^{-\frac{2\pi irz}{h}} g(z)$  は  $z \rightarrow z+h$  の下で不変となり, したがってフーリエ展開  $e^{-\frac{2\pi irz}{h}} g(z) = \sum a_n q_h^n$  を得る. つまり

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi iz(n+r)}{h}}$$

となる. この展開において全ての  $n < 0$  に対して  $a_n = 0$  となるとき  $f$  はカスプ  $s$  で正則であるという. また, それに加えて  $a_0 = 0$  が成り立つとき  $f$  はカスプ  $s$  で零点を持つという.

準備が整ったので半整数ウェイトの保型形式とカスプ形式を定義する.

**定義 3.7.**  $\Gamma' \subset \Gamma_0(4)$  を有限指数の部分群とする.  $f$  は任意の  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}'$  に対する  $[[\tilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}}$  の下で不変であるものとする.  $f$  が  $\Gamma'$  の全てのカスプで正則であるとき  $f$  を  $\tilde{\Gamma}'$  に対するウェイト  $k/2$  の正則保型形式と呼ぶ. また  $f$  が全てのカスプで零点を持つとき  $f$  をカスプ形式と呼ぶ. ウェイト  $k/2$  の正則保型形式, カスプ形式全体からなる集合をそれぞれ  $M_k(\tilde{\Gamma}'), S_k(\tilde{\Gamma}')$  と書き表す.

**定義 3.8.**  $4|N$  とする. また  $\chi$  は  $N$  を法とするディリクレ指標とする. このとき任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  に対し,

$$f|[\tilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}} = \chi(d)f$$

を満たす  $f$  からなる集合を  $M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$  と表す. また  $S_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi) = S_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_1(N)) \cap M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$  と定める.

半整数ウェイトの保型形式の例としてテータ関数とアイゼンシュタイン級数を挙げる.

**定義 3.9.**  $z \in \mathbb{H}$  に対しテータ関数  $\theta(z)$  を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$$

として定める.

**命題 3.10.**  $\theta(z) \in M_{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  である.

この命題の証明は [2, Koblitz, pp.147-152, pp.176 - 182] を参照. 次に半整数ウェイトのアイゼンシュタイン級数を導入する.

**定義 3.11.**  $k$  を 5 以上の整数とする. このとき,

$$E_{\frac{k}{2}}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-k},$$

$$F_{\frac{k}{2}}(z) = E_{\frac{k}{2}}(z) \left| \left[ \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{2z} \right) \right]_{\frac{k}{2}} \right.$$

と定める.

次の命題は [2, Koblitz, pp186-187] による.

**命題 3.12.** 上で定めた  $E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}}$  は  $k \geq 5$  の範囲で収束し,  $E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}} \in M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  である.

本論文で用いるアイゼンシュタイン級数はこれらの一次結合で表わされるものである.

**定義 3.13.**  $\lambda = \frac{k-1}{2} \geq 2$  とし,  $E_{\frac{k}{2}}, F_{\frac{k}{2}}$  を上で定義したものとする. このとき  $G_{\frac{k}{2}}$  を次のように定義する.

$$G_{\frac{k}{2}} = \zeta(1-2\lambda)(E_{\frac{k}{2}} + (1+i^k)2^{-\frac{k}{2}}F_{\frac{k}{2}}).$$

$G_{\frac{k}{2}}$  は半整数ウェイトの保型形式であり,  $|D|$  番目のフーリエ係数が  $L$  関数になるという性質を持っている. ここで  $f(z) = \sum a(n)q^n$  に対して  $L(f, D, k)$  を,

$$L(f, D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) a(n)n^{-s}$$

として定義している. ただし  $D$  は二次体の基本判別式であり,  $\left(\frac{D}{n}\right)$  はクロネッカー記号を表すものとする. また, 全ての  $a(n)$  について  $a(n) = 1$  となるような場合  $L_D(s)$  と表すこともある.  $L_D(s)$  については次の命題が重要である. 証明は [2, Koblitz, pp.76-77, 191] に詳しい.

**命題 3.14.**  $L_D(s)$  は全複素平面上に解析接続される. また正の整数  $k$  に対して次の関数等式が成り立つ.

$$L_D(k) = \left(\frac{\pi}{|D|}\right)^{k-\frac{1}{2}} L_D(1-k) \begin{cases} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)/\Gamma(\frac{1}{2}k) & k \text{ が偶数のとき,} \\ \Gamma(1 - \frac{1}{2}k)/\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k) & k \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

次の命題の証明は [2, Koblitz, pp.185 - 193] を参照.

**命題 3.15.**  $G_{\frac{k}{2}} \in M_{\frac{k}{2}}$  であり,  $D$  を二次体の基本判別式とすると  $G_{\frac{k}{2}}$  の  $|D|$  番目のフーリエ係数は  $L_D(1-\frac{\lambda}{2})$  に等しい.

また,  $L(f_1 \otimes f_2, s)$  を次のように定める.

**定義 3.16.**  $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の合同部分群とし,  $f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(\Gamma')$ ,  $f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in M_k(\Gamma')$  であるとする. また,  $L(f_1, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ ,  $L(f_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)$  に対して,

$$\begin{aligned} L(f_1, s) &= \prod_p (1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \\ &= \prod_p ((1 - \alpha_1(p)p^{-s})(1 - \alpha_2(p)p^{-s}))^{-1} \\ L(f_2, s) &= \prod_p (1 - b(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \\ &= \prod_p ((1 - \beta_1(p)p^{-s})(1 - \beta_2(p)p^{-s}))^{-1} \end{aligned}$$

と表せる. このとき  $L(f_1 \otimes f_2, s)$  を

$$\begin{aligned} &L(f_1 \otimes f_2, s) \\ &= \prod_p ((1 - \alpha_1(p)\beta_1(p)p^{-s})(1 - \alpha_1(p)\beta_1(p)p^{-s}) \\ &\quad \times (1 - \alpha_2(p)\beta_1(p)p^{-s})(1 - \alpha_2(p)\beta_2(p)p^{-s}))^{-1} \end{aligned}$$

と定める.

次の命題の証明は黒川らの本 [9] の 448 ページから 453 ページに詳しい.

命題 3.17. 上の記号の下で,

$$L(f_1 \otimes f_2, s) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n=1}^{\infty} a(n)b(n)n^{-s}$$

が成り立つ.

## 4 主定理の記述

この章ではヘッケ作用素を導入し, 志村の定理について解説した後, 論文 [4] の主定理を具体的に記述することを目標とする. まず整数ウェイトの場合のヘッケ作用素を定義するための準備をする.

定義 4.1.  $S^+$  を  $\mathbb{Z}$  の  $\{0\}$  でない加法の部分群とする. また  $S^\times$  を  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$  の部分群とし,  $n$  を正の整数とする. このとき集合  $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$  を以下のように定める.

$$\Delta^n(N, S^\times, S^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid N|c, a \in S^\times, b \in S^+, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = n \right\}.$$

この集合の具体的な例としては  $\Gamma_0(N) = \Delta^1(N, (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  などが挙げられる. また定義から明らかに  $\Delta^1(N, S^\times, S^+)$  は  $\Gamma$  の合同部分になっていることに注意する. この  $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$  を用いてヘッケ作用素を定義する.

定義 4.2.  $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の合同部分群とし,  $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$  であるとする. また,  $\Gamma'' = \Gamma' \cap \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$  で  $d = [\Gamma' : \Gamma'']$ ,  $\Gamma' = \cup_{j=1}^d \Gamma''\gamma_j$  であるとする. そして  $f(z)$  を  $\gamma \in \Gamma'$  に対する  $[\gamma]_k$  の下で不変な関数であるとする. このとき,

$$f(z)|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k = \sum_{j=1}^d f(z)|[\alpha\gamma_j]_k$$

と定める.

定義 4.3.  $\Gamma' = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$  とし,  $n$  を正の整数とする.  $f \in M_k(\Gamma')$  とするとき,

$$T_n = n^{\frac{k}{2}-1} \sum f|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$$

と定める. ただし和は  $\Delta^1(N, S^\times, S^+)$  に含まれる  $\Gamma'$  に関する両側剰余類全てをわたるものとする.

次に半整数ウェイトの保型形式の場合のヘッケ作用素を定義していく.

定義 4.4.  $4|N$  かつ  $f \in M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_1(N))$  とする. また  $n$  を  $N$  と互いに素な正の整数とする.

このとき  $\alpha_n = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \sqrt[4]{n} \right)$  に対して,

$$f|[\tilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\tilde{\Gamma}_1(N)]_{\frac{k}{2}} = \sum_j f|[\alpha_n\tilde{\gamma}_j]_{\frac{k}{2}}$$

と定める. ここで和は両側剰余類  $\tilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\tilde{\Gamma}_1(N)$  に含まれる  $\tilde{\Gamma}_1(N)$  に関するすべての相異なる右側剰余類をわたる.

**定義 4.5.** 上の記号の下で  $T_{p^2}$  を次のように定義する.

$$T_{p^2} = p^{\frac{k}{2}-2} f|[\tilde{\Gamma}_1(N)\alpha_{p^2}\tilde{\Gamma}_1(N)]$$

次の命題は [2, Koblitz, pp156-157, p210] による.

**命題 4.6.**  $T_{p_1^{2n}} T_{p_2^{2m}}$  は  $T_{p^2}$  の多項式で表される. また相異なる素数  $p_1, p_2$  に対して  $T_{p_1^{2n} p_2^{2m}} = T_{p_1^{2n}} T_{p_2^{2m}} = T_{p_2^{2m}} T_{p_1^{2n}}$  である.

ヘッケ作用素を平方数で定義しているのは次の命題から, そうでない場合を考える意味がないからである.

**命題 4.7.**  $n$  を  $N$  と互いに素な正の整数で完全平方数でないものとする. このとき,

$$f|[\tilde{\Gamma}_1(N)\alpha_n\tilde{\Gamma}_1(N)]_{\frac{k}{2}} = 0$$

である.

この命題の証明は [2, Koblitz, pp.204 - 206] を参照.

次にヘッケ作用素の同時固有形式について述べる.

**定義 4.8.** 整数ウェイト, 半整数ウェイトのそれぞれの場合においてヘッケ作用素の同時固有形式を以下のように定義する.

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in M_{2k}(\Gamma)$  とする. すべての素数  $p$  に対して, ある  $\lambda_p \in \mathbb{C}$  が存在して  $T_p(f(z)) = \lambda_p f(z)$  が成り立つとき,  $f(z)$  をヘッケ作用素  $T_p$  の同時固有形式という. また  $f(z)$  がカスプ形式でかつ  $a_1 = 1$  のとき,  $f(z)$  を正規化された同時固有形式という.
- $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \in M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  とする. すべての素数  $p$  に対して, ある  $\lambda_p \in \mathbb{C}$  が存在して  $T_p(g(z)) = \lambda_p g(z)$  が成り立つとき,  $g(z)$  をヘッケ作用素  $T_p$  の同時固有形式という. また  $g(z)$  がカスプ形式でかつ  $c_1 = 1$  のとき,  $g(z)$  を正規化された同時固有形式という.

与えられた保型形式の空間上の全てのヘッケ作用素に対する同時固有形式を考えることは非常に有用である. そのような条件を満たす半整数ウェイトのカスプ形式と整数ウェイトのカスプ形式の対応について述べているものが次の志村の定理である.

**定理 4.9.** (志村対応)  $k$  を 3 以上の整数とし,  $\lambda = \frac{k-1}{2}$  で  $4|N$  とし,  $\chi$  を  $N$  を法とするディリクレ指標であるとする.  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$  を全ての素数  $p$  に対する

$T_{p^2}$  の同時固有形式で, 対応する固有値が  $\lambda_p$  であるものとする. 関数  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$  を次の形式的な恒等式で定める.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s}}.$$

このとき,  $\chi^2$  のコンダクターで割り切れるある正の整数  $N'$  に対し  $f \in M_{k-1}(N', \chi^2)$  となる.

上の定理の  $f, g$  の対応を志村対応と呼ぶ.

次に Kohnen のプラススペース  $M_{\frac{k}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  を考える.

**定義 4.10.**  $k$  を正の整数とし,  $\lambda = \frac{k-1}{2}$  とする.  $(-1)^\lambda n \equiv 2, 3 \pmod{4}$  であるときは常に  $a_n = 0$  となるような保型形式  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  からなる  $M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  の部分空間を  $M_{\frac{k}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  で表す. また, 同様の条件を満たすカスプ形式からなる集合を  $S_{\frac{k}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  と表す.

Kohnen は [3, Kohnen, pp253-257] で次のことを示した.

**命題 4.11.** 志村対応の  $M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4)), S_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  への制限はそれぞれ  $M_{2k}(\Gamma), S_{2k}(\Gamma)$  への同型を与える.

保型形式のピーターソン内積を整数ウェイトの場合と半整数ウェイトの場合のそれぞれにおいて定義する.

**定義 4.12.**  $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の合同部分群とする.  $F'$  を  $\Gamma'$  の基本領域とし,  $f_1, f_2 \in M_k(\Gamma')$  で,  $f_1$  と  $f_2$  の少なくとも一つはカスプ形式であるものとする. このとき  $\langle f_1, f_2 \rangle$  を次のように定める.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma']} \int_{F'} f_1(z) \overline{f_2(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}.$$

正の整数  $N$  に対して  $4|N$  であるとする. また,  $F_0(N)$  を  $\Gamma_0(N)$  の基本領域とし,  $g_1, g_2 \in M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(N))$  で,  $g_1$  と  $g_2$  の少なくとも一つはカスプ形式であるとする. このとき  $\langle g_1, g_2 \rangle$  を次のように定める.

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{6[\Gamma_0(4) : \Gamma_0(N)]} \int_{F_0(N)} g_1(z) \overline{g_2(z)} y^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx dy}{y^2}.$$

ピーターソン内積に関する以下の二つの命題については [2, Koblitz, pp170-171] を参照.

**命題 4.13.** 上の記号の下でそれぞれ  $\langle f_1, f_2 \rangle$  と  $\langle g_1, g_2 \rangle$  は絶対収束する. またピーターソン内積の値は基本領域の取り方に依存しない. さらに  $\Gamma', \Gamma''$  を合同部分群とし,  $f_1, f_2 \in M_k(\Gamma')$  かつ  $f_1, f_2 \in M_k(\Gamma'')$  とする. このときピーターソン内積の値は  $f_1, f_2$  を  $M_k(\Gamma')$  の元と見るか  $M_k(\Gamma'')$  の元と見るかには依存しない.

**命題 4.14.**  $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$  であるとする. 定義 4.12 の記号の下で,

$$\langle f_1|[\alpha], f_2 \rangle = \langle f_1, f_2|[\alpha^{-1}] \rangle$$

が成り立つ.

これ以降断りがない限り, 本論文において  $f(z), g(z)$  は以下の意味で用いる.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a(n)q^n \in S_{2k}(\Gamma), \text{ ヘッケ作用素の同時固有形式.} \\ g(z) &= \sum c(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4)), f \text{ の志村対応.} \end{aligned}$$

この論文の主目的は以下の定理を示すことである.

**定理 4.15.** 上の記号の下で

$$\frac{c(|D|)^2}{\langle g, g \rangle} = \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f, f \rangle}$$

が成り立つ.

## 5 主定理の証明

この章では [3] の結果を用いて主定理の証明を行う. そのための準備を進める. まず志村対応の制限  $\mathcal{S}_D^+$  を導入し, その性質について述べる. なおこの章では  $k$  の範囲は  $k \geq 1$  とする. これ以降  $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4)), S_{2k}(\Gamma)$  のことをそれぞれ単に  $S_{k+\frac{1}{2}}^+, S_{2k}$  と表すことがある.

**定義 5.1.**  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  とし,  $D$  は二次体の基本判別式で  $(-1)^k D > 0$  を満たすものとする. このとき  $\mathcal{S}_D^+ f$  を以下のように定める.

$$\mathcal{S}_D^+ f = \frac{1}{2} L_D(1-k)a(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{d|n} \left( \frac{D}{d} \right) d^{k-1} a\left( \frac{n^2}{d^2} |D| \right) \right) q^n.$$

**命題 5.2.**  $f \in M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4)), g \in S_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  とすると以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D^+ f &\in M_{2k}(\Gamma), \\ \mathcal{S}_D^+ g &\in S_{2k}(\Gamma). \end{aligned}$$

また,  $g = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}^+, f \in S_{2k}$  をそれぞれヘッケ作用素の同時固有形式とその志村対応とすると, このとき  $\mathcal{S}_D^+ g = c(|D|)f$  である.

命題 5.2 の証明は Kohnen による論文 [3] の pp.257 – 261 を参照. なお本論文を通して特に断りがない限りこれ以降  $D$  は二次体の基本判別式で  $(-1)^k D > 0$  を満たすものとする.

次に  $M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  から  $M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  への射影を定義する.

**定義 5.3.**  $g \in M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  に対し写像  $pr^+(g)$  を

$$pr^+(g) = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{-k} W_4 U_4(g) + \frac{1}{3} g$$

と定める.

ただし  $U_4, W_4$  は以下で定義される.

$$\begin{aligned} U_4\left(\sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} c(4n)q^n, \\ (W_4 g)(z) &= \left(\frac{2z}{i}\right)^{-k-\frac{1}{2}} g\left(\frac{-1}{4z}\right). \end{aligned}$$

次の命題は [3, Kohnen, pp251-252] を参照.

**命題 5.4.** 上の定義で  $pr^+$  は  $M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  から  $M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  への写像であり well – defined である.

この  $pr^+$  を用いて定理の証明の中心となる保型形式を定義する. まず指標付きのアイゼンシュタイン級数とトレース作用素について定義しておく.

**定義 5.5.**  $k > 2$  に対してアイゼンシュタイン級数  $G_{k,D}, G_{k,4D}$  を

$$\begin{aligned} G_{k,D} &= \frac{1}{2} L_D(1-k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \right) q^n, \\ G_{k,4D} &= G_{k,D}(4z) - 2^{-k} \left(\frac{D}{2}\right) G_{k,D}(2z) \end{aligned}$$

と定義する.

**定義 5.6.**  $M, N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, N|M$  に対して  $Tr_N^M$  は  $\Gamma_0(M)$  上の保型形式から  $\Gamma_0(N)$  上の保型形式へのトレース作用素を表わし以下で定められる.

$$(Tr_N^M f)(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(M) \setminus \Gamma_0(N)} f|[\gamma]_k (f \in M_k(\Gamma_0(M))).$$

また  $4|N$  とすれば半整数ウェイトの保型形式に対しても同様に,

$$(Tr_N^M g)(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(M) \setminus \Gamma_0(N)} g|[\gamma]_{\frac{k}{2}} \left( g \in M_{\frac{k}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(M)) \right).$$

で定められる.

**定義 5.7.** 上の定義の下で  $\mathcal{F}_D(z)$  と  $\mathcal{G}_D(z)$  を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D(z) &= \text{Tr}_1^D(G_{k,D}(z)^2), \\ \mathcal{G}_D(z) &= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{D}{2}\right) 2^{-k}\right)^{-1} pr^+ \text{Tr}_4^{4D}(G_{k,4D}(z)\theta(|D|z)).\end{aligned}$$

まずこれらの関数が保型形式になっていることを確認する.

**命題 5.8.**  $G_{k,D}, G_{k,4D}, \mathcal{F}_D, \mathcal{G}_D$  について

1.  $\mathcal{F}_D \in M_{2k}(\Gamma)$ .
2.  $\mathcal{G}_D \in M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$ .
3.  $G_{k,D} \in M_k(\Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$ .
4.  $G_{k,4D} \in M_k(\Gamma_0(4D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$ .

が成り立つ.

**証明.**  $G_{k,D} \in M_k(\Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$  を示せば十分である. 実際命題 2.10 により  $G_{k,4D} \in M_k(\Gamma_0(4D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$  が分かり, トレース作用素の定義から後の二つも分かる. まず定義 2.12 で定めたレベル  $|D|$  のアイゼンシュタイン級数を思い出しておく.

$$G_k^{(a_1, a_2)}(z) = \sum_{(m_1, m_2) \equiv (a_1, a_2) \pmod{|D|}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^k}.$$

このレベル  $|D|$  のアイゼンシュタイン級数の指標付きの有限和が  $M_k(\Gamma_0(D), \chi)$  に属していることを示し, 次に  $G_{k,D}$  がその和の定数倍になっていることを示す.

**補題 5.9.**  $\chi$  を  $D$  を法とするディリクレ指標とするとき以下が成り立つ.

$$\sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)} \in M_k(\Gamma_0(D), \chi).$$

**証明.** 任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D)$  を一つ取る.  $G_k^{(0,d) \bmod |D|} ||[\gamma]_k = G_k^{(0,d)\gamma \bmod |D|}$  より以下のように式変形出来る.

$$\begin{aligned}\left( \sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)} \right) ||[\gamma] &= \sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0, dd_\gamma)} \\ &= \chi(d_\gamma) \sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(dd_\gamma)} G_k^{(0, dd_\gamma)} \\ &= \chi(d_\gamma) \sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)}.\end{aligned}$$

したがって  $\sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)}$  が  $[\gamma]_k$  で  $\chi(d\gamma)$  倍しか変化しないことは示せた. ここで  $G_k^{(0,d) \bmod D} |[\gamma]_k = G_k^{(0,d)\gamma \bmod D}$  より,  $[\gamma]_k$  は  $G_k^{(0,d) \bmod D}$  同士を置換している. また各  $G_k^{(0,d)}$  は無限遠点で有限の値を取る. 実際,

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} G_k^{(0,d)}(z) = \sum_{n \equiv d_2 \bmod |D|} n^{-k}$$

であるが  $k > 2$  なので右辺は収束している. したがってカuspでの正則性も分かる. 以上から求める結果を得る.  $\square$

この和が  $G_{k,D}$  の定数倍であることを示す.

$$\begin{aligned} \zeta^d(k) &= \sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \equiv d \bmod |D|}} n^{-k}, \\ c_k &= \frac{(-2\pi i)^k}{|D|^k (k-1)!}, \\ \xi &= e^{\frac{2\pi i}{|D|}} \end{aligned}$$

と定めると  $G_k^{(0,d)}$  のフーリエ展開は以下のように表わせたことを思い出す.

$$G_k^{(0,d)}(z) = \zeta^d(k) + (-1)^k \zeta^{-d}(k) + c_k \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j|n} j^{k-1} (\xi^{jd} + (-1)^k \xi^{-jd}) \right) q^n.$$

これを用いて和  $\sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)}$  のフーリエ展開を求めて  $G_{k,D}$  のフーリエ展開と比較する. ウェイト  $k$  が偶数の場合を示した後, 奇数の場合を示す. まず定数項を求める.

$$\begin{aligned} & \sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \left( \frac{D}{d} \right) (\zeta^d(k) + (-1)^k \zeta^{-d}(k)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{D}{n} \right) n^{-k} + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{D}{-n} \right) n^{-k} \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) L_D(k) \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} L_D(1-k) \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{(-2)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\pi}}{(k-1)!! (\frac{1}{2}k-1)!} L_D(1-k). \end{aligned}$$

ただし二行目と三行目の間で命題 3.14 の  $k$  が偶数の場合の  $L_D(k)$  と  $L_D(1-k)$  の関数等式

$$L_D(k) = \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} L_D(1-k)$$

を用いた. また最後の式変形はガンマ関数の半整数での値

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) = \frac{(-2)^{\frac{k}{2}}}{(k-1)!!} \sqrt{\pi}$$

を代入した.  $G_{k,D}$  の定数項は  $\frac{1}{2}L_D(1-k)$  であったので, 和  $\sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)}$  の一次以

上の項の係数が,  $G_{k,D}$  の一次以上の項の係数  $\sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1}$  に,

$$\begin{aligned} & \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) \left(\frac{\pi}{|D|}\right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2^{\frac{k}{2}+1} \sqrt{\pi}}{(k-1)!! (\frac{1}{2}k-1)!} \\ &= \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) \frac{(2\pi i)^k}{|D|^{k-\frac{1}{2}} (k-1)!} \end{aligned}$$

をかけたものと等しければ良い. ここで  $(-1)^k D > 0$  より  $1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right) > 0$  に注意する.

一次以上の項の和を計算する. 和の順序を入れ替えて次の式変形を得る.

$$\begin{aligned} & \sum_{d=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{d}\right) c_k \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j|n} j^{k-1} (\xi^{jd} + (-1)^k \xi^{-jd}) \right) q^n \\ &= c_k \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j|n} j^{k-1} \sum_{d=0}^{D-1} \left(\frac{D}{d}\right) (\xi^{jd} + (-1)^k \xi^{-jd}) \right) q^n. \end{aligned}$$

ここで固定された各  $j$  について一番内側の和の部分を考える. 命題 2.18 のクロネッカー記号についてのガウス和の性質  $\sum_{d=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{d}\right) \xi^{jd} = \left(\frac{D}{j}\right) \sqrt{D}$  から以下の式変形を得ることが出来る.

$$\begin{aligned} j^{k-1} \sum_{d=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{d}\right) (\xi^{jd} + (-1)^k \xi^{-jd}) &= \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) j^{k-1} \sum_{d=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{d}\right) \xi^{jd} \\ &= \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) j^{k-1} \left(\frac{D}{j}\right) \sqrt{D}. \end{aligned}$$

したがって各  $q^n$  の係数は以下のように表わせる.

$$c_k \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) \sqrt{D} \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1}.$$

$(-1)^k D > 0$  に注意すると, 上式に  $c_k = (-2\pi i)^k / (|D|^k (k-1)!)$  を代入して,

$$\begin{aligned} & \frac{(-2\pi i)^k}{|D|^k (k-1)!} \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) \sqrt{D} \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \\ &= \left(1 + (-1)^k \left(\frac{D}{-1}\right)\right) \frac{(2\pi i)^k}{|D|^{k-\frac{1}{2}} (k-1)!} \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \end{aligned}$$

を得る. これで偶数の場合は証明が完了した. 奇数の場合は命題 3.14 の奇数の場合の関数等式

$$L_D(k) = \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k)} L_D(1-k)$$

を用いて  $\sum_{d \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})} \overline{\chi(d)} G_k^{(0,d)}$  の定数項を,

$$\begin{aligned} & \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) L_D(k) \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k)} L_D(1-k) \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \left( \frac{\pi}{|D|} \right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{(-2)^{\frac{1}{2}(k-1)} \sqrt{\pi}}{(\frac{1}{2}(k-1))!(k-2)!!} L_D(1-k) \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \frac{(-i)(2\pi i)^k}{|D|^{k-\frac{1}{2}}(k-1)!} \times \frac{1}{2} L_D(1-k) \end{aligned}$$

と計算できる. 一次以上の項の係数も偶数と同様に計算でき,  $(-1)^k D > 0$  に注意すると,

$$\begin{aligned} & c_k \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \sqrt{D} \sum_{d|n} \left( \frac{D}{d} \right) d^{k-1} \\ &= \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) \frac{(-i)(2\pi i)^k}{|D|^{k-\frac{1}{2}}(k-1)!} \sum_{d|n} \left( \frac{D}{d} \right) d^{k-1} \end{aligned}$$

を得る. したがって奇数の場合も示せたので証明が完了した. □

次にこの  $\mathcal{F}_D, \mathcal{G}_D$  のピーターソン内積についての命題を述べる.

**命題 5.10.**  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{2k}$  を正規化された同時固有形式とすると, 以下が成り立つ.

$$\langle f, \mathcal{F}_D \rangle = \frac{1}{2} \frac{(2k-2)! L_D(1-k)}{(4\pi)^{2k-1} L_D(k)} L(f, 2k-1) L(f, D, k).$$

**命題 5.11.**  $g = \sum c(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}^+$  を前命題の  $f(z)$  の志村対応で, 同時固有形式であるようなものとする. このとき以下が成り立つ.

$$\langle g, \mathcal{G}_D \rangle = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2}) L_D(1-k)}{(4\pi)^{k-\frac{1}{2}} L_D(k)} |D|^{k-\frac{1}{2}} L(f, 2k-1) c(|D|).$$

これらの命題は Kohnen の論文 [3] の pp.261–265 で示されている. ここでは  $\mathcal{F}_D$  に関する式について示すことにする. 準備として次の命題を用意する.

**命題 5.12.**  $k_1, k_2$  は正の整数で  $k_2 \geq k_1 + 2 > 2$  を満たすとする.  $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{k_1+k_2}(\Gamma_0(D))$ ,  $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in M_{k_1}(\Gamma_0(D), (\frac{D}{d}))$  とする. このとき,

$$\int_{F_0(D)} f_1 \overline{f_2} G_{k_2, D} y^{k_1+k_2} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{\Gamma(k_1+k_2-1)}{(4\pi)^{k_1+k_2-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)b(n)}{n^{k_1+k_2-1}}$$

が成り立つ.

この命題証明の詳細は Zagier[8] の pp.144 – 146 を参照.

**証明.** 命題 5.10 の証明を行う.  $\Gamma_0(D)$  の基本領域を  $F_0(D)$  とすると, 命題 4.14 より

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}_D \rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma_0(D) \backslash \Gamma} \langle f, G_{k, D}[\gamma] \rangle \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_0(D) \backslash \Gamma} \langle f[\gamma^{-1}], G_{k, D} \rangle \\ &= [\Gamma : \Gamma_0(D)] \langle f, G_{k, D} \rangle \\ &= \int_{F_0(D)} f(z) \overline{G_{k, D}(z)} y^{2k} \frac{dx dy}{y^2} \end{aligned}$$

が成り立つ.  $G_{k, D}$  のフーリエ係数を

$$\sigma_{k-1, D} = \sum_{d|n} \left( \frac{D}{d} \right) d^{k-1}$$

と表し, 命題 5.12 を  $k_1 = k_2 = k$ ,  $f_1(z) = f(z)$ ,  $f_2(z) = G_{k, D}(z)$  として適用すれば

$$\int_{F_0(D)} f(z) \overline{G_{k, D}(z)} y^{2k} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n) \sigma_{k-1, D}(n)}{n^{2k-1}}$$

が得られる. さらに命題 3.17 より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \sigma_{k-1, D}(n) n^{-s} = \frac{L(f \otimes G_{k, D}, s)}{\zeta(2s - 2k + 2)}$$

と表せる. ここで  $L(G_{k, D}, s) = \zeta(s) L_D(s - k + 1)$  であることに注意する. 実際  $\sigma_{k-1, D}$  の乗法性を用いると

$$L(G_{k, D}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1, D}(n) n^{-s} = \prod_p \left( \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_{k-1, D}(p^l) p^{-ls} \right)$$

が成り立つ. また,

$$\sigma_{k-1, D}(p^l) = \frac{1 - p^{(l+1)(k-1)}}{1 - p^{k-1}}$$

であるので

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sigma_{k-1,D}(p^l) p^{-ls} = \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-k+1)})}$$

が成り立つ。したがって、

$$L(G_{k,D}, s) = \zeta(s) L_D(s-k+1)$$

が確かめられた。よって  $L(f \otimes G_{k,D}, s)$  の定義に従って

$$L(f \otimes G_{k,D}, s) = L(f, s) L(f, D, s-k+1)$$

がわかる。以上の結果に  $s = 2k-1$  を代入して定数項を整理すれば求める式を得る。□

さらに定義 5.1 で導入した  $\mathcal{S}_D^+$  を用いて  $\mathcal{F}_D, \mathcal{G}_D$  の関係を記述することが出来る。

**命題 5.13.**  $\mathcal{S}_D^+$  を以前定義したものとすると以下が成り立つ。

$$\mathcal{S}_D^+(\mathcal{G}_D) = \mathcal{F}_D.$$

この命題の証明はやや長くなるので次の章で行うこととして、ここではひとまず認めることにする。次の補題は  $S_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4)), M_{k+\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0(4))$  についての重要な命題である。この補題についても詳細は論文 [3] の pp.257–261 を参照。

**補題 5.14.**  $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  は、正規化された同時固有形式からなるピーターソン内積に関する直交基底  $\{g_v\}$  を持つ。  $g_v$  の  $n$  番目のフーリエ係数を  $c_v(n)$  と表すと、  $S_{2k}(\Gamma)$  は  $\mathcal{S}_D^+(g_v) = c_v(|D|) f_v$  によって対応付けられる同時固有形式からなる直交基底  $\{f_v\}$  を持つ。

また  $M_{k+\frac{1}{2}}^+(\tilde{\Gamma}_0(4))$  は上の  $\{g_v\}$  とアイゼンシュタイン級数  $G_{k+\frac{1}{2}}$  から成る直交基底を持ち、  $\mathcal{S}_D^+(G_{k+\frac{1}{2}}) = L_D(1-k) G_{2k}$  である。

準備が整ったので主定理の証明に移る。証明の方針を先に述べておく。  $\mathcal{F}_D, \mathcal{G}_D$  を直交基底を用いて表す。その式と直交基底の一つとのピーターソン内積を取ることによって  $\langle f_v, f_v \rangle$  と  $\langle g_v, g_v \rangle$  との間の比例関係が分かる。最後に命題 5.10 と命題 5.11 の結果を代入することで求める式を得ることが出来る。

**証明.**  $\{f_v\}, \{g_v\}$  は補題 5.14 と同じ意味で用いることとする。ピーターソン内積の結果を代入していくことで証明を進めていく。  $\mathcal{G}_D(z) \in M_{k+\frac{1}{2}}^+$  なので補題 5.14 より

$$\mathcal{G}_D(z) = \lambda G_{k+\frac{1}{2}}(z) + \sum_v \lambda_v g_v(z)$$

と表わすことが出来る。ここで  $\{g_v\}$  は直交基底であったので両辺に  $g_v$  とのピーターソン内積を取ると以下の結果を得る。

$$\lambda_v = \frac{\langle g_v, \mathcal{G} \rangle}{\langle g_v, g_v \rangle}.$$

上の命題 5.13 より  $\mathcal{S}_D^+(\mathcal{G}_D) = \mathcal{F}_D$  が成り立つ. 補題 5.14 の等式  $\mathcal{S}_D^+(g_v) = c_v(|D|)f_v$  を思い出しておく. すると以下が成り立つ.

$$\mathcal{F}_D(z) = \lambda L_D(1-k)G_{2k}(z) + \sum_v \lambda_v c_v(|D|)f_v(z).$$

この式の両辺と  $f_v$  とのピーターソン内積を取ると,  $\{f_v\}$  が直交基底であったことから以下を得る.

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}_D \rangle &= c_v(|D|) \langle f_v, f_v \rangle \lambda_v \\ &= c_v(|D|) \langle f_v, f_v \rangle \frac{\langle g_v, \mathcal{G}_D \rangle}{\langle g_v, g_v \rangle}. \end{aligned}$$

この式に  $\langle f_v, \mathcal{F}_D \rangle, \langle g_v, \mathcal{G}_D \rangle$  の結果を代入したものが次式である.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{(2k-2)! L_D(1-k)}{(4\pi)^{2k-1} L_D(k)} L(f, 2k-1) L(f, D, k) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2}) L_D(1-k)}{(4\pi)^{k-\frac{1}{2}} L_D(k)} |D|^{-k+\frac{1}{2}} L(f, 2k-1) c_v(|D|)^2 \frac{\langle f_v, f_v \rangle}{\langle g_v, g_v \rangle}. \end{aligned}$$

両辺に共通の項などを取り除いて整理した後, ガンマ関数の半整数での値を代入すると以下を得る.

$$\begin{aligned} \frac{c_v(|D|)^2}{\langle g_v, g_v \rangle} &= \frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{k-\frac{1}{2}} \Gamma(k-\frac{1}{2})} \frac{2}{\sqrt{\pi}} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f_v, f_v \rangle} \\ &= \frac{(2k-2)!}{(4\pi)^{k-\frac{1}{2}} (2k-3)!! \sqrt{\pi}} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f_v, f_v \rangle} \\ &= \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f_v, f_v \rangle}. \end{aligned}$$

これは望んだ式であったので証明が完了した. □

## 6 命題 5.13 の証明

$D=1$  の場合の証明が分かりやすく, 一般の場合の類似となっているのでまずこれを示す. 証明の方針を述べる. 定義から  $\mathcal{S}_1^+(\mathcal{G}_1)$  のフーリエ展開を具体的に計算していく. 最後に約数関数  $\sigma_{k-1}(n)$  に関する等式を示して求める結果を得る.

証明. [3, Kohnen, pp254-257, 262] より

$$pr^+(G_{k,4}(z)\theta(z)) = \frac{2}{3} \left( 1 - \left( \frac{D}{2} \right) 2^{-k} \right) G_k(4z)\theta(z)$$

が成り立つ. したがって  $\mathcal{G}_1(z)$  のフーリエ展開は以下のように表わすことが出来る.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(z) &= G_k(4z)\theta(z) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n \right) \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n.\end{aligned}$$

ただし上の式で  $\sigma_{k-1}(0) = \frac{1}{2}\zeta(1-k)$  とし,

$$c(n) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}, r^2 \leq n, \\ r^2 \equiv n \pmod{4}}} \sigma_{k-1}\left(\frac{n-r^2}{4}\right)$$

と定めた. この結果から  $\mathcal{S}_1^+(\mathcal{G}_1)$  を計算して次式を得る.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^+\mathcal{G}_1(z) &= \sigma_{k-1}(0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{d|n} d^{k-1} c\left(\frac{n^2}{d^2}\right) \right) q^n \\ &= \sigma_{k-1}(0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{d|n} d^{k-1} \sum_{\substack{|r| \leq \sqrt{\frac{n}{d}}, \\ r \equiv \frac{n}{d} \pmod{2}}} \sigma_{k-1}\left(\frac{n^2 - r^2 d^2}{4d^2}\right) \right) q^n.\end{aligned}$$

ここで  $n_1 = \frac{n-rd}{2}, n_2 = \frac{n+rd}{2}$  と置くと上の式において  $q^n$  の係数は

$$\sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0, \\ n_1 + n_2 = n}} \sum_{d|(n_1, n_2)} d^{k-1} \sigma\left(\frac{n_1 n_2}{d^2}\right)$$

と表わせる. ここで次の補題を用意する.

**補題 6.1.**  $\sigma_{k-1}$  について以下が成り立つ.

$$\sum_{d|(n_1, n_2)} d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{n_1 n_2}{d^2}\right) = \sigma_{k-1}(n_1) \sigma_{k-1}(n_2).$$

この補題が成り立つと仮定する. このとき補題を用いて以下を得る.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^+\mathcal{G}_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{n_1, n_2 > 0, \\ n_1 + n_2 = n}} \sigma_{k-1}(n_1) \sigma_{k-1}(n_2) \right) q^n \\ &= G_k(z)^2 \\ &= \mathcal{F}_1(z).\end{aligned}$$

したがって後は補題を示せば  $D=1$  の場合の証明を完了する.

証明. 補題を証明する.  $a_1, a_2, (a_1, a_2)$  の素因数分解を

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}, \\ a_2 &= p_1^{\beta_1} \cdots p_l^{\beta_l}, \\ (a_1, a_2) &= p_1^{\gamma_1} \cdots p_l^{\gamma_l} \end{aligned}$$

と表わすことにする. ここで任意の  $i$  に対して  $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0$  であり,  $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$  である.  $\sigma_{k-1}$  は乗法性を持つ, すなわち互いに素な  $m, n$  に対して  $\sigma_{k-1}(nm) = \sigma_{k-1}(n)\sigma_{k-1}(m)$  が成り立つ. このことから以下の式変形を得る.

$$\sum_{d|(a_1, a_2)} d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{a_1 a_2}{d^2}\right) = \prod_{i=1}^l \sum_{j=0}^{\gamma_i} p_i^{j(k-1)} \sigma_{k-1}(p^{\alpha_i + \beta_i - 2j}).$$

したがって各  $p_i$  について  $\sum_{j=0}^{\gamma_i} p_i^{j(k-1)} \sigma_{k-1}(p^{\alpha_i + \beta_i - 2j}) = \sigma_{k-1}(p_i^{\alpha_i}) \sigma_{k-1}(p_i^{\beta_i})$  が成り立つことを示せば良い.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\gamma_i} p_i^{j(k-1)} \sigma_{k-1}(p^{\alpha_i + \beta_i - 2j}) \\ &= \frac{1}{1 - p^{k-1}} \sum_{j=0}^{\gamma_i} (p_i^{j(k-1)} - p^{\alpha_i + \beta_i + 1 - j(k-1)}) \\ &= \frac{1}{(1 - p)^{2(k-1)}} (1 - p^{(\gamma_i + 1)(k-1)} - p^{(\alpha_i + \beta_i - \gamma_i + 1)(k-1)} + p^{(\alpha_i + \beta_i + 2)(k-1)}) \\ &= \frac{(1 - p^{(\alpha_i + 1)(k-1)}) (1 - p^{\beta_i + 1(k-1)})}{(1 - p)^{k-1} (1 - p)^{k-1}} \\ &= \sigma_{k-1}(p_i^{\alpha_i}) \sigma_{k-1}(p_i^{\beta_i}). \end{aligned}$$

以上から補題が示せた. □

□

□

次に一般の  $D$  の場合についての証明を行う. これ以降  $D_1 D_2 = D$  であるとする. 準備として指標付きのアイゼンシュタイン級数  $G_{k, D_1, D_2}(z)$  を導入する.

**定義 6.2.**  $D_1, D_2$  を互いに素な二次体の基本判別式で,  $(-1)^k D_1 D_2 > 0$  を満たすものとする. このときアイゼンシュタイン級数  $G_{k, D_1, D_2}$  を以下のように定義する.

$$G_{k, D_1, D_2} = \gamma_{k, D_1}^{-1} \frac{1}{2} \sum_{m, n} \left(\frac{D_1}{n}\right) \left(\frac{D_2}{m}\right) (m D_1 z + n)^{-k}$$

ただし  $\gamma_{k, D_1} = \left(\frac{D_1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}} |D_1|^{-k + \frac{1}{2}} \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}$  であり, 和は  $(0, 0)$  を除く全ての整数の組を渡る.

次に  $G_{k,D_1,D_2}(z)$  が保型形式になっていることを示し, そのフーリエ展開を具体的に求める.

**命題 6.3.**  $G_{k,D_1,D_2}(z) \in M_k(\Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$  であり, 以下のようにフーリエ展開出来る.

$$G_{k,D_1,D_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1,D_1,D_2}(n) q^n.$$

ただし

$$\sigma_{k-1,D_1,D_2}(n) = \sum_{\substack{d_1, d_2 > 0, \\ d_1 d_2 = n}} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \left(\frac{D_2}{d_2}\right) d_1^{k-1}.$$

また定数項は  $D_2 = 1$  でない限り 0 に等しく,  $D_2 = 1$  の場合  $-L_{D_1}(1-k)L_{D_2}(0)$  に等しいとする.

**証明.** 証明の基本方針は  $G_{k,D}(z)$  のときと同じである. すなわち  $G_{k,D_1,D_2}$  をレベル  $D$  のアイゼンシュタイン級数の指標付きの有限和で表わしフーリエ展開を計算する. 考えやすいようにひとまず係数  $\frac{1}{2}\gamma_{k,D_1}^{-1}$  を無視して考えることにする.  $\text{mod } D$  で和を取ることによって以下の式変形を得る.

$$\begin{aligned} \sum'_{m,n} \left(\frac{D_1}{n}\right) \left(\frac{D_2}{m}\right) (mD_1z+n)^{-k} &= \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \sum'' (mD_1z+n)^{-k} \\ &= \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) G_k^{(d_2,d_1)}(D_1z). \end{aligned}$$

ただし和  $\sum''$  は  $m \equiv d_2, n \equiv d_1 \pmod{D}$  を  $(0,0)$  を除いて渡るものとする.

まず,

$$\sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) G_k^{(d_2,d_1)}(D_1z) \in M_k(\Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right))$$

を示す. 任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D)$  に対して  $c = Dc'$  と表わせることに注意すると

$G_k^{(d_2,d_1)}$  の定義から以下が成り立つ. ここで和  $\sum'_{n,m}$  は  $(0,0)$  を除く全ての整数の組を渡るものとする.

$$\begin{aligned} G_k^{(d_2,d_1)}(D_1z)[[\gamma]] &= (cz+d)^{-k} \sum'_{n,m} \left(mD_1 \frac{az+b}{cz+d} + n\right)^{-k} \\ &= \sum'_{n,m} \{D_1(ma + nD_2c')z + (nd_1b + nd)\}^{-k} \\ &= G_K^{(d_2a+d_1D_2c', d_2D_1b+d_1d)}. \end{aligned}$$

ここで  $a$  は  $D$  と互いに素なので  $d$  が  $0$  から  $|D|-1$  をわたるとき  $\text{mod } |D|$  で  $d_2a$  も  $0$  から  $|D|-1$  をわたることになる. また  $\left(\frac{D_2}{d_2}\right)$  は  $|D_2|$  を法とするディリクレ指標なので  $|D_2|$  の倍数を分母部分に足しても変わらない. したがって  $\left(\frac{D_2}{d_2a}\right) = \left(\frac{D_2}{d_2a+d_1D_2c}\right)$  が成り立つ. 同様のことが  $\left(\frac{D_1}{d_1}\right)$  についても言えるので以下を得る.

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) G_k^{(d_2, d_1)}(D_1z) \right) |[\gamma] \\ &= \left(\frac{D_2}{a}\right) \left(\frac{D_1}{d}\right) \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2a+d_1D_2c}\right) \left(\frac{D_1}{d_1d+d_2D_1b}\right) G_k^{(d_2a+d_1D_2c', d_2D_1b+d_1d)}(D_1z) \\ &= \left(\frac{D_2}{a}\right) \left(\frac{D_1}{d}\right) \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) G_k^{(d_2, d_1)}(D_1z). \end{aligned}$$

したがって  $\left(\frac{D_2}{a}\right) \left(\frac{D_1}{d}\right) = \left(\frac{D}{d}\right)$  と表せることを示せば良い.  $\gamma \in \Gamma_0(D)$  より  $ad \equiv 1 \pmod{D}$  なので

$$\left(\frac{D_2}{a}\right) \left(\frac{D_1}{d}\right) = \left(\frac{D_2}{a}\right) \left(\frac{D_2}{d}\right)^2 \left(\frac{D_1}{d}\right) = \left(\frac{D_2}{ad}\right) \left(\frac{D_1D_2}{d}\right) = \left(\frac{D}{d}\right)$$

が成り立つ. 以上から

$$\sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_2}{d_2}\right) \left(\frac{D_1}{d_1}\right) G_k^{(d_2, d_1)}(D_1z) \in M_k \left( \Gamma_0(D), \left(\frac{D}{\cdot}\right) \right)$$

を示せた.

次にこの和のフーリエ展開を考えていく. 命題 2.13 よりレベル  $D$  のアイゼンシュタイン級数のフーリエ展開の式は以下のように表せるのであったことを思い出す.

$$\sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \left(\frac{D_2}{d_2}\right) G_k^{(d_2, d_1)}(D_1z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \sum_{d_1=0}^{|D|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \left(\frac{D_2}{d_2}\right) b_n \right) q_{D_2}^n.$$

ただしここで

$$\begin{aligned} b_n &= c_k \left( \sum_{\substack{j|n, \\ n \equiv jd_2 \pmod{|D|}}} j^{k-1} \xi^{jd_1} + (-1)^k \sum_{\substack{j|n, \\ n \equiv -jd_2 \pmod{|D|}}} j^{k-1} \xi^{-jd_1} \right), \\ c_k &= \frac{(-2\pi i)^k}{|D|^k (k-1)!}, \\ \xi &= e^{\frac{2\pi i}{|D|}} \end{aligned}$$

としている.

$q_{D_2}^n$  の係数について  $n$  が  $|D_2|$  で割り切れるときとそうでない場合について分けて考えていく.  $n$  が  $D_2$  で割り切られないとき明らかに  $b_n$  の中の  $j$  も  $D_2$  で割り切られない. このとき  $\xi' = \xi^{|D_1|} = e^{\frac{2\pi i}{|D_2|}}$  と置くと固定した  $j$  に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi^{jd_1} &= \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi^{jd_1} \sum_{l=0}^{|D_2|-1} \xi^{jl|D_1|} \\ &= \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi^{jd_1} \sum_{l=0}^{|D_2|-1} \xi'^{jl} \end{aligned}$$

が成り立つ. しかし内側の和は  $j \equiv 0 \pmod{|D_2|}$  でない限り 0 に等しい. したがって  $n$  が  $|D_2|$  で割り切られないとき  $q_{|D_2|}^n$  の係数は 0 である.

次に  $n$  が  $D_2$  で割り切れるときを考える. このとき  $n = |D_2|n'$  と書けば各  $q_{D_2}^n = q^{n'}$  の係数は

$$c_k \left( \sum_{\substack{j|D_2|n', \\ |D_2|n \equiv jd_2 \pmod{|D|}}} j^{k-1} \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \xi^{jd_1} + (-1)^k \sum_{\substack{j|D_2|n', \\ |D_2|n \equiv -jd_2 \pmod{|D|}}} j^{k-1} \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \xi^{-jd_1} \right)$$

と表せる. ここで  $j$  が  $|D_2|$  で割り切られないとき,  $jd_2 \equiv |D_2| \pmod{D}$  より  $\left(\frac{D_2}{d_2}\right) = 0$  となる. したがって  $j$  が  $|D_2|$  で割り切れるときのみ考えればよいので,  $j = |D_2|j'$  と表すことにする.  $\xi'' = e^{\frac{2\pi i}{|D_1|}}$  と置くと,  $|D_2| \nmid n$  のときの考察と同様にして以下の式が導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi^{jd_1} &= \sum_{d_1=0}^{|D_1|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi^{|D_2|j'd_1} \sum_{i=0}^{|D_2|-1} \xi'^{|D_2|j'i} \\ &= \sum_{d_2=0}^{|D_2|-1} \left(\frac{D_1}{d_1}\right) \xi''^{j'd_1|D_2|} \\ &= \left(\frac{D_1}{j'}\right) \sqrt{D_1|D_2|}. \end{aligned}$$

ここで最後の式変形に命題 2.18 のクロネッカー記号のガウス和の性質  $g_j\left(\left(\frac{D}{j}\right)\right) =$

$$\sum_{d=0}^{|D|-1} \left(\frac{D}{d}\right) \xi^{jd} = \left(\frac{D}{j}\right) \sqrt{D}$$
 を用いた.

以上から  $q^n$  係数を次のように表すことが出来る.

$$\begin{aligned}
& c_k \sum_{\substack{j'|n' \\ n' \equiv j'd_2 \pmod{|D_1|}}} |D_2|^{k-1} j'^{k-1} \left( \frac{D_1}{j'} \right) \sqrt{D_1} |D_2| + \\
& c_k (-1)^k \sum_{\substack{j'|n' \\ n' \equiv -j'd_2 \pmod{|D_1|}}} |D_2|^{k-1} j'^{k-1} \left( \frac{D_1}{-j'} \right) \sqrt{D_1} |D_2| \\
= & c_k \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) |D_2|^k \sqrt{D_1} \sum_{d_2=0}^{|D|-1} \left( \frac{D_2}{d_2} \right) \sum_{j'|n', j'd_2 \equiv n' \pmod{|D_1|}} j'^{k-1} \left( \frac{D_1}{j'} \right) \\
= & c_k \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) |D_2|^k \sqrt{D_1} \sum_{d_1, d_2 > 0, d_1 d_2 = n'} \left( \frac{D_1}{d_1} \right) \left( \frac{D_2}{d_2} \right) d_1^{k-1}.
\end{aligned}$$

したがって後は

$$c_k \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) |D_2|^k \sqrt{D_1} = 2\gamma_{k, D_1}$$

を示せば良い. 仮定より  $(-1)^k D > 0$  なので  $1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) = 2$  が成り立つ.  $c_k$  の定義式を代入すると以下を得る.

$$\begin{aligned}
c_k \left( 1 + (-1)^k \left( \frac{D}{-1} \right) \right) |D_2|^k \sqrt{D_1} &= 2 \frac{(-2\pi i)^k}{|D|^k (k-1)!} |D_2|^k \left( \frac{D_1}{-1} \right)^{\frac{1}{2}} |D_1|^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \frac{(-2\pi i)^k}{|D_1|^{k-\frac{1}{2}}} \left( \frac{D_1}{-1} \right) \\
&= 2\gamma_{k, D_1}.
\end{aligned}$$

以上から命題が示せたことになる. □

命題 5.13 証明のためにいくつか記号を導入する.

**定義 6.4.**  $m \in \mathbb{N}$  と  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$  に対して  $U_m f$  を次のように定める

$$U_m f = \frac{1}{m} \sum_{r \pmod{m}} f\left(\frac{z+r}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a(mn)q^n.$$

**定義 6.5.** 二次体の基本判別式  $D$  に対して  $u, v, w$  を次のように定める. なお  $(n, m)$  は  $n$  と  $m$  の最大公約数を表わす.

$$\begin{aligned}
u(D) &= (D, 8), \\
v(D) &= \frac{(D, 8)}{(D, 2)}, \\
w(D) &= \frac{(D, 8)^2}{(D, 4)^2}.
\end{aligned}$$

この記号の下で補題を一つ用意する. この補題は  $\mathcal{F}_D, \mathcal{G}_D$  のフーリエ展開を表わしたものである.

**補題 6.6.**  $D$  を二次体の基本判別式で  $(-1)^k D > 0$  を満たすものとする. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D(z) &= \sum_{D=D_1 D_2} \left( \frac{D_2}{-1} \right) U_{v(D_1)|D_2|} (G_{k,D_1,D_2}(z)^2), \\ U_{u(|D|)} \mathcal{G}_D(z) &= \sum_{D=D_1 D_2} \left( \frac{D_2}{-|D_1|} \right) U_{u(D)w(D_1)|D_2|} (G_{k,D_1,D_2}(4z)) \theta(|D_1|z).\end{aligned}$$

まずこの補題が成り立つと仮定して命題 5.13 を証明していく. 証明の基本的な方針は  $D=1$  のときと同じである. つまり  $\mathcal{G}_D(z)$  のフーリエ展開を  $\sigma_{k-1,D_1,D_2}$  の等式を用いて計算していくのである.

**証明.** ここでは  $D$  が奇数のときの証明のみを与えることとする. 補題の二つ目の式の右辺に注目して  $\mathcal{G}_D$  のフーリエ展開を計算する. そのためにまず  $G_{k,D_1,D_2}(4z)\theta(|D_1|z)$  のフーリエ係数を計算する.

$$\begin{aligned}G_{k,D_1,D_2}(4z)\theta(|D_1|z) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1,D_1,D_2}(n) q^{4n} \right) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{|D_1|n^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}, r^2 \leq n, \\ |D_1|r^2 \equiv n \pmod{4}}} \sigma_{k-1,D_1,D_2} \left( \frac{n - |D_1|r^2}{4} \right) \right) q^n.\end{aligned}$$

この式と補題から  $\mathcal{G}_D(z)$  のフーリエ係数が分かる.

$$\mathcal{G}_D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{D=D_1 D_2} \left( \frac{D_2}{-|D_1|} \right) \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}, \\ n \equiv r^2 \pmod{4}}} \sigma_{k-1,D_1,D_2} \left( \frac{|D_2|n - |D_1|r^2}{4} \right) \right).$$

ただし負の整数  $n$  に対して  $\sigma_{k-1,D_1,D_2}(n) = 0$  と定めた.

$m = n^2|D|$  に対して

$$\frac{m|D_2| - |D_1|r^2}{4} = |D_1| \frac{n|D_1| - r n|D_2| + r}{2}$$

と表わせるので, このとき  $a_1 = \frac{n|D_1| - r}{2}$ ,  $a_2 = \frac{n|D_2| + r}{2}$  と置けば以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}, r^2 \geq n, \\ |D_1|r^2 \equiv n \pmod{4}}} \sigma_{k-1, D_1, D_2} \left( \frac{n - |D_1|r^2}{4} \right) \\
&= \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n|D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2} (|D_1|a_1a_2) \\
&= \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n|D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2} (a_1a_2).
\end{aligned}$$

ここで次の命題を用いた.

**命題 6.7.**  $\sigma_{k-1, D_1, D_2}$  について,

$$\sigma_{k-1, D_1, D_2} (|D_1|a_1a_2) = \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) \sigma_{k-1, D_1, D_2} (|D_1|a_1a_2)$$

が成り立つ.

**証明.** 定義より

$$\sigma_{k-1, D_1, D_2} (|D_1|a_1a_2) = \sum_{\substack{d_1, d_2 > 0, \\ d_1d_2 = |D_1|a_1a_2}} \left( \frac{D_1}{d_1} \right) \left( \frac{D_2}{d_2} \right) d_1^{k-1}$$

である.  $|D_1|$  が  $d_2$  を割り切る場合  $d_2 = |D_1|d'_2$  と表わせるので以下が成り立つ.

$$\left( \frac{D_1}{d_1} \right) \left( \frac{D_2}{d_2} \right) = \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) \left( \frac{D_1}{d_1} \right) \left( \frac{D_2}{d'_2} \right).$$

また  $|D_1|$  が  $d_2$  を割り切らないとき  $(|D_1|, d_1) = m > 1$  なので  $d_1 = md'_1$  と表わせば以下を得る.

$$\begin{aligned}
\left( \frac{D_1}{d_1} \right) \left( \frac{D_2}{d_2} \right) &= \left( \frac{D_1}{m} \right) \left( \frac{D_1}{d'_1} \right) \left( \frac{D_2}{d_2} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

以上から  $\sigma_{k-1, D_1, D_2} (|D_1|a_1a_2) = \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) \sigma_{k-1, D_1, D_2} (a_1a_2)$  が成り立つことを示せた.  $\square$

命題 5.13 の証明に戻る. 今までの議論から  $\mathcal{G} = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$  と表わしたとき  $\mathcal{S}_D^+(\mathcal{G})$

のフーリエ係数を次のように計算していくことが出来る.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_D^+(\mathcal{G}_D) &= \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} c \left(\frac{n^2}{d^2} |D|\right) \\
&= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-|D_1|}\right) \left(\frac{D_2}{|D_1|}\right) \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = \frac{n}{d} |D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2}(a_1 a_2) \\
&= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) \sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n |D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2} \left(\frac{a_1 a_2}{d^2}\right) \\
&= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n |D_2|}} \sum_{d|(a_1, a_2)} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} \sigma_{k-1, D_1, D_2} \left(\frac{a_1 a_2}{d^2}\right) \\
&= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n |D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2}(a_1) \sigma_{k-1, D_1, D_2}(a_2).
\end{aligned}$$

ここで最後の式変形は  $D = 1$  の場合, つまり  $\sigma_{k-1}$  のときとほとんど同様に示せる. さて, 一方補題 6.6 の最初の式より  $\mathcal{F}_D$  のフーリエ展開は以下のように表わすことが出来る.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_D(z) &= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) U_{|D_2|}(G_{k, D_1, D_2}(z)^2) \\
&= \sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) U_{|D_2|} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1, D_1, D_2}(|D_2| n) q^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{D=D_1 D_2} \left(\frac{D_2}{-1}\right) \sum_{\substack{a_1, a_2 \geq 0, \\ a_1 + a_2 = n |D_2|}} \sigma_{k-1, D_1, D_2}(a_1) \sigma_{k-1, D_1, D_2}(a_2)\right).
\end{aligned}$$

したがって以上の結果から  $\mathcal{S}_D^+(\mathcal{G}_D) = \mathcal{F}_D$  を得る. □

最後に補題 6.6 を示す.

**証明.**  $D$  が奇数の場合の一つ目の式のみを取り扱うことにする. トレースを直接計算することで証明を行う.  $\Gamma_0(D) \backslash SL_2(\mathbb{Z})$  の代表元として

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |D_1| & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ |D_1| & |D_1|\mu + 1 \end{pmatrix}$$

という形のものが取れる. ただしここで  $D = D_1 D_2$  であり  $\mu$  は  $\text{mod } D_2$  を渡る. 実際任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対して  $(c, D) = |D_1|$ ,  $c(|D_1|\mu + 1) \equiv d|D_1| \pmod{D_2}$  となるよう

に  $D_1, \mu$  を定め,  $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ |D_1| & |D_1|\mu + 1 \end{pmatrix}$  とすると,

$$\begin{aligned} \gamma\gamma_0^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |D_1|\mu + 1 & -\mu \\ -|D_1| & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(|D_1|\mu + 1) - b|D_1| & -\mu a + b \\ c(|D_1|\mu + 1) - d|D_1| & -\mu c + d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D) \end{aligned}$$

である.

次に  $\text{Tr}_1^D(G_{k,D}(z)^2)$  を求めるために  $(|D_1|z+1)^{-k}G_{k,D}\left(\frac{z}{|D_1|z+1}\right)$  を計算していく.  $|D_1|^*$  を  $|D_1| \times |D_1|^* \equiv 1 \pmod{|D_2|}$  となるようなものとして定め,  $|D_1| \cdot |D_1|^* = \beta|D_2| + 1$  と表す. このとき  $G_{k,D}(z) = G_{k,D,1}(z)$  の定義から以下のように式変形することが出来る.

$$\begin{aligned} &(|D_1|z+1)^{-k}G_{k,D}\left(\frac{z}{|D_1|z+1}\right) \\ &= (|D_1|z+1)^{-k}\gamma_{k,D}^{-1}\frac{1}{2}\sum'_{m,n}\left(\frac{D}{n}\right)\left(mD\frac{z}{|D_1|z+1}+n\right) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{k,D_1}^{-1}\left(\frac{D_2}{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}|D_2|^{k-\frac{1}{2}}\sum'_{m,n}\left(\frac{D}{n}\right)\left(D_1z\left(mD_2+n\frac{|D_1|}{D_1}\right)+n\right) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{k,D_1}^{-1}\left(\frac{D_2}{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}|D_2|^{-\frac{1}{2}}\sum'_{m,n}\left(\frac{D}{n}\right)\left(D_1\frac{z+|D_1|^*}{|D_2|}\left(m|D_2|+n\frac{|D_1|}{D_1}\right)\right. \\ &\quad \left.-m\frac{D_2}{|D_2|}D_1|D_1|^*+\frac{n}{|D_2|}(1-|D_1|\cdot|D_1|^*)\right) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{k,D_1}^{-1}\left(\frac{D_2}{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}|D_2|^{-\frac{1}{2}}\sum'_{m,n}\left(\frac{D}{n}\right)\left(D_1\frac{z+|D_1|^*}{|D_2|}\left(m|D_2|+n\frac{|D_1|}{D_1}\right)\right. \\ &\quad \left.-\frac{D_2}{|D_2|}\left(mD_1|D_1|^*+n\beta\right)\right). \end{aligned}$$

ここで,  $\left(\frac{D}{n}\right)$  について,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{n}\right) &= \left(\frac{D_1}{n}\right)\left(\frac{D_2}{n}\right) \\ &= \left(\frac{D_1}{-\frac{D_2}{|D_2|}n\beta}\right)\left(\frac{D_2}{\frac{|D_1|}{D_1}n}\right)\left(\frac{D_1}{-\frac{D_2}{|D_2|}\beta}\right)\left(\frac{D_2}{\frac{|D_1|}{D_1}}\right) \\ &= \left(\frac{D_1}{-\frac{D_2}{|D_2|}mD_1|D_1|^*-\frac{D_2}{|D_2|}n\beta}\right)\left(\frac{D_2}{mD_2+n\frac{|D_1|}{D_1}}\right)\left(\frac{D_2}{|D_1|}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 実際  $\beta$  の定め方から,

$$\begin{aligned} \left( \frac{D_1}{-\frac{D_2}{|D_2|}\beta} \right) \left( \frac{D_2}{\frac{|D_1|}{D_1}} \right) &= \left( \frac{D_1}{-\frac{D_2}{|D_2|}D_2\beta} \right) \left( \frac{D_1}{D_2} \right) \left( \frac{D_1}{\frac{|D_1|}{D_1}} \right) \\ &= \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) \end{aligned}$$

である.

また,  $(n, m)$  が  $(0, 0)$  を除く整数の組を渡るとき

$$\left( -\frac{D_2}{|D_2|}mD_1|D_1|^* - \frac{D_2}{|D_2|}n\beta, mD_2 + n\frac{|D_1|}{D_1} \right)$$

も  $(0, 0)$  を除く整数の組を渡る. 以上のことから,

$$(|D_1|z+1)^{-k}G_{k,D} \left( \frac{z}{|D_1|z+1} \right) = \left( \frac{D_2}{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) |D_2|^{-\frac{1}{2}}G_{k,D_1,D_2} \left( \frac{z+|D_1|}{|D_2|} \right)$$

が分かる. したがって,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_D(z) &= Tr_1^D(G_{k,D}(z)) \\ &= \sum_{D=D_1D_2} \sum_{\mu \bmod D_2} \left\{ (|D_1|(z+\mu)+1)^{-k}G_{k,D} \left( \frac{z+\mu}{|D_1|(z+\mu)+1} \right) \right\}^2 \\ &= \sum_{D=D_1D_2} \sum_{\mu \bmod D_2} \left\{ \left( \frac{D_2}{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{D_2}{|D_1|} \right) |D_2|^{-\frac{1}{2}}G_{k,D_1,D_2} \left( \frac{z+\mu+|D_1|^*}{|D_2|} \right) \right\}^2 \\ &= \sum_{D=D_1D_2} \left( \frac{D_2}{-1} \right) U_{|D_2|}(G_{k,D_1,D_2}(z)^2) \end{aligned}$$

を得るので補題 6.6 の一つ目の式が示せた. □

## 参考文献

- [1] B. Gross and D. Zagier “On the critical values of Hecke L-series”, Soc. Math. de France, 49 - 54, 1980
- [2] N. Koblitz “Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms”, Springer, 1993
- [3] W. Kohnen “Modular Forms of Half-Integral Weight on  $\Gamma_0(4)$ ”, Mathematische Annalen, 249 - 266, 1980.
- [4] W. Kohnen and D. Zagier “Values of L-series of Modular Forms at the Center of the Critical Strip”, Inventiones mathematicae, 175 - 198, 1981.

- [5] S. Niwa “On Shimura’s trace formula. ” , Nagoya Math. J. , 183-202 , 1977.
- [6] G. Shimura “On Modular Forms of Half Integral Weight” , Annals of Mathematics , 440 - 481 , 1973.
- [7] J. L. Waldspurger “Correspondances de Shimura et Shintani” , J.Math , 1-113 , 1975
- [8] D. Zagier “Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields” In:Modular Forms of One Variable VI, Springer Lecture Notes 627, Springer-Verlag, pp.105-169, 1977
- [9] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅 “数論 3 岩沢理論と保型形式” , 岩波書店, 1998
- [10] 高木貞治 “初等整数論講義” , 共立出版 , 1971.
- [11] 雪江明彦 “整数論 3 解析的整数論への誘い” , 日本評論社 , 2014.