短区間に含まれる二平方和数の分布の不規則性について

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
修士課程 2 年
学籍番号：0530-31-1444
柳川 泰壮

2021 年 1 月 19 日

目次

1　はじめに

1.1　主定理の背景

この修士論文は「Antal Balog and Trevor D. Wooley. Sums of Two Squares in Short Intervals. *Canad. J. Math.*,Vol. 52, No. 4, pp. 673-694, 2000.」の解説論文である．この論文を要約すると「任意の正整数 N について, 短区間 $[x, x+\log^N x]$ 中に含まれる二平方和数の個数は, x 以下の二平方和数の個数という大域的な情報からは必ずしも正しく推察されない」という主張になる．

まずこの論文の背景として素数の分布について議論をする．x を正の実数とし, 1 から x までの間に素数がいくつ存在するかという「大域的な」問題は次のように素数定理という形で解決された．

定理 1.1.1. [Ten15, p261, Theorem4.1.] $\pi(x)$ を 1 以上 x 以下の素数の個数とする．また対数積分を

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

と定める．このとき

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\frac{x}{\exp(\sqrt{\log x})}\right) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

が成り立つ． ◇

註 1.1.2. 関数の漸近挙動の表し方については次節にまとめている． ◇

これと対比して, x, y を正の実数として区間 $[x, x+y]$ 中に素数がいくつ存在するかという「局所的な」問題を考える．特に $y = o(x)$ とした時に大域的な定理 1.1.1 から「推察」を行うと, $x \to +\infty$ において

$$\begin{aligned}\pi(x+y) - \pi(x) &= \left(\frac{x+y}{\log(x+y)} + O\left(\frac{x+y}{\log^2(x+y)}\right)\right) - \left(\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right) \\ &= \frac{x+y}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) - \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \\ &\sim \frac{y}{\log x}\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

が導かれる．この予測はある程度正しく, 例えば $y = x^{7/12+\epsilon}$ と取ると (1.1.3) 式が成り立つ ([Hux72])．しかしどのような量 $y = o(x)$ についてもこの漸近挙動が成り立つわけではない．これを示したのが次の 1985 年に Maier が発表した結果である:

定理 1.1.4. [Mai85, p.221, THEOREM] $N > 1$ を任意に一つ与えたとき,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x+\log^N x) - \pi(x)}{\log^{N-1} x} < 1 < \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x+\log^N x) - \pi(x)}{\log^{N-1} x}$$

が成り立つ． ◇

これは言い換えると, $y = \log^N x$ として

$$\pi(x+y) - \pi(x) \sim \frac{y}{\log x} = \log^{N-1} x$$

が, すなわち (1.1.3) 式が成り立たないという主張になる. これはつまり, 始点が x で長さが $\log^N x$ という短区間を取ったとき, その区間内に含まれる素数の個数という「局所的」な振る舞いは, 素数定理という「大域的な」振る舞いから導かれる「推察」とは必ずしも合致しないというものである.

1985 年の Maier の論文 [Mai85] の発表時には, このような局所的に現れる分布の偏りは素数の出現の非周期性によるものではないかとも考えられていた. しかし 2000 年に発表された論文 [BW00] において, 二平方和数についても定理 1.1.4 と同様の分布の偏りが見られることが明らかとなり, これが単に素数の集合のみに考えられる特殊な偏りではないことが暗示された.

これより今回示す主定理 [BW00, Theorem.1] の記述の準備を行う. まず記号の導入を行う. (この論文全体で用いる記号の導入は次節で行う.)

定義 1.1.5. 整数 n が二平方和数であるとは, ある整数 a, b が取れて

$$n = a^2 + b^2$$

と表されることを指す. このことを

$$n = \square + \square$$

と略記する (「square」 という単語が「2 乗」と「正方形」を意味するところから来ている). 二平方和数の特性関数

$$b(n) := \begin{cases} 1 & (n = \square + \square) \\ 0 & (n \neq \square + \square) \end{cases}$$

を定めた上で, 数え上げ関数

$$B(x) := \sum_{1 \leq n \leq x} b(n)$$

を定める.

また, 定数 B を次で定める:

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p \equiv -1 \, (\mathrm{mod}\, 4)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} \tag{1.1.6}$$

ただし p は素数を表すものとする. ◇

次に素数定理と対応する, 大域的な二平方和数の漸近挙動を述べる. 以下の結果は E. Laudau による結果である:

定理 1.1.7. [Lan53, pp.641–669] $x \to +\infty$ において

$$B(x) \sim \frac{Bx}{\sqrt{\log x}}$$

が成り立つ. (この定理は後に命題 3.2.3 として証明を与える.) ◇

そして二平方和数の局所的な分布の記述のために, 次の連立差分微分方程式が定める関数を用意する:

定義 1.1.8. 正の実数 s に対して関数 $F(s), f(s)$ を

$$\begin{cases} (s^{1/2}F(s))' = \frac{1}{2}s^{-1/2}f(s-1) & (s > 2) \\ (s^{1/2}f(s))' = \frac{1}{2}s^{-1/2}F(s-1) & (s > 1) \end{cases} \tag{1.1.9}$$

$$
\begin{cases} F(s) = 2\sqrt{\dfrac{e^\gamma}{\pi}} s^{-1/2} & (0 < s \leq 2) \\ f(s) = 0 & (0 < s \leq 1) \end{cases} \tag{1.1.10}
$$

という連立差分微分方程式と初期条件を満たす唯一の連続解としてそれぞれ定める．ただし γ は Euler の定数である．◇

この $F(s), f(s)$ はそれぞれ単調減少/単調増加であり，

$$
0 \leq f(s) < 1 < F(s) \quad (s > 0)
$$

を満たすことが分かる ([Iwa76]).

以上の準備の下で主定理を述べる:

定理 1.1.11. [BW00, p.675, Theorem 1] 正の整数 N を任意に一つ固定する．このとき $+\infty$ に発散する増大列 $\{x^+\} \subset \mathbb{R}$ が取れて，$y = (\log x^+)^N$ に対して

$$
\mathrm{card}\{x^+ \leq n \leq x^+ + y : n = \Box + \Box\} > \frac{By}{\sqrt{\log x^+}}\{F(N) + o(1)\}
$$

が成立する．また同じく増大列 $\{x^-\} \subset \mathbb{R}$ が取れて，$y = (\log x^-)^N$ に対して

$$
\mathrm{card}\{x^- \leq n \leq x^- + y : n = \Box + \Box\} < \frac{By}{\sqrt{\log x^-}}\{f(N) + o(1)\}
$$

が成立する．◇

定理 1.1.7 と比較すると，定義 1.1.8 で定めた関数 F, f がそれぞれ二平方和数の局所的な分布の「上振れ」・「下振れ」を表していることが分かる．この主張から特に $y = \log^N x$ として

$$
\mathrm{card}\{x \leq n \leq x + y : n = \Box + \Box\} \sim \frac{By}{\sqrt{\log x}}
$$

が成り立たないということが導かれる．

1.2 記法と記号

この節では本論文で用いる記号と記法の定義について述べる．$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ整数，実数，複素数全体の集合とし，$\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}$ をそれぞれ正の整数全体の集合と正の実数全体の集合とする．$p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ は特に断らない限りは素数を表すとする．$x \in \mathbb{R}$ に対し $[x]$ で x 以下の最大の整数を表す．$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して (n, m) で n と m の最大公約数を表す．$x, y \in \mathbb{R}$ に対して (x, y) が開区間を表すこともあるが，両者は特に混乱が起きない場合は断らずに同じ記号を用いる．$\mu(n)$ は Möbius 関数，$\phi(n)$ は Euler 関数とし，$\nu(n)$ で n の異なる素因数の数を表す．$P_{\min}(n), P_{\max}(n)$ はそれぞれ n の最小/最大素因数とする．$m|n$ は m が n の約数であることを表す．$a \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $p^a||n$ は $p^a|n$ であるが $p^{a+1} \nmid n$ であることを表す．$\Gamma(t)$ はガンマ関数を表す．実数 $x \geq 2$ に対して「対数積分」を

$$
\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}
$$

と定める．

次に関数の漸近挙動の記法を定める．f, h, g を実関数とし，それらの定義域の部分集合を I とする．このとき，ある定数 $c = c(f, h, I) \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して

$$|f(x) - h(x)| \leq c \cdot g(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つことを

$$f(x) = h(x) + O(g(x)) \quad (x \in I)$$

と表す（Landau の O-記法）．特に $h(x) = 0$ の時にこれは

$$f(x) = O(g(x)) \tag{1.2.1}$$

となるが，これを

$$f(x) \ll g(x) \quad (x \in I) \tag{1.2.2}$$

と書くこともある（Vinogradov の記法）．両者の使い分けは単に個々の漸近挙動の記述が簡明になる方を選ぶ．区間 I において $f(x) \ll g(x)$ かつ $g(x) \ll f(x)$ が成り立つとき，これを

$$f(x) \asymp g(x) \quad (x \in I)$$

と表す．式 (1.2.1), (1.2.2) において，定義より取られる定数 c が別のパラメータ k にも依存する場合，これを強調して

$$f(x) = O_k(g(x)) \qquad f(x) \ll_k g(x)$$

と表記することがある．その逆に，定数 c が他のパラメータによらず絶対定数で取られる場合，それぞれ

$$f(x) = O_{\mathrm{ab}}(g(x)) \qquad f(x) \ll_{\mathrm{ab}} g(x)$$

と表記することもある．

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ とし，$g(x)$ が x_0 の近くで 0 にならないとき

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0) \quad \iff \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

また

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to x_0) \quad \iff \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

と定める．

節の最後に本論文で扱う数え上げ関数をいくつか定める．

定義 1.2.3. 実数 $x, y \geq 2$ に対して

$$\Phi(x, y) := \mathrm{card}\{1 \leq n \leq x : P_{\min}(n) > y\}$$

と定める．つまり x 以下の正の整数のうち，最小の素因数が y より大きいものを数え上げる関数である．また「$P_{\min}(n) > y$」という性質を満たす正の整数 n を「y-rough」であるという． $\diamond$

定義 1.2.4. 実数 $x, y \geq 2$ に対して

$$B^{\pm}(x, y) := \mathrm{card}\{1 < n \leq x : b \equiv \pm 1 \pmod 4),\ P_{\min}(n) > y\}$$

と定める．これらはつまり $\Phi(x,y)$ を 4 で割った余りで分けた数え上げ関数である．すなわち

$$\Phi(x,y) = B^{+}(x,y) + B^{-}(x,y)$$

ということである． ◇

定義 1.2.5. 実数 $x, y \geq 2$ に対して

$$A(x,y) := \mathrm{card}\{n = \square + \square : 1 \leq n \leq x,\ n \equiv 1 \pmod 4,\ P_{\max}(n) \leq y\}$$

と定める．つまり x 以下の正の二平方和数のうち, 4 で割った余りが 1 でありかつ最大の素因数が y 以下であるものを数え上げる関数である．また, $P_{\max}(n) \leq y$ を満たす自然数 n を「y-smooth」であるという． ◇

ここで本論文の章立てについて述べておく．2 章は主定理の証明の概略とアイデアを述べる．3 章では二平方和数についての基礎的知識および部分和法について説明する．4 章では差分微分方程式が定める関数を更に用意し, $F(s), f(s)$ に関する技術的主張を述べる．5 章では「ふるい法 (sieve method)」と呼ばれる理論の一般論を説明し, 続く 6 章でふるい法を用いて算術級数中の二平方和数の分布が導かれることを概説する．7・8 章ではそれぞれ rough な整数・smooth な二平方和数の分布について述べる．9 章では主定理の詳細な証明を述べる．各節については, それぞれの属する章の始めに概要を述べることにする．

謝辞

二年間に渡って様々に惜しみないご指導をくださった雪江明彦先生に心よりの感謝を申し上げます．

2 主定理の証明の概要

この章では主定理の証明の概略とアイデアを述べる．まず 2.1 節では主定理の証明のために必要な “Maier matrix” という集合を導入する．次に 2.2 節ではこの “Maier matrix” がなぜ証明の役に立つのかという理由を述べる．そして 2.3 節では実際の証明の流れをかいつまんで説明し, 続く章の内容がどのように主定理の証明に貢献するのかということの俯瞰とする．

2.1 主定理の証明のために

以下この章では $x \in \mathbb{R}$ が充分大きいとする．また $y, z \in \mathbb{R}$ は $2 \leq y < x^{1/4}$, $2 \leq z < x^{1/4}$ をみたし, $z = o(y)$ であるとする．

まず ”Maier matrix” の定義のために次を準備する:

定義 2.1.1. 各 p に対して, α_p を次をみたす唯一の奇数として定める:

$$p^{\alpha_p} > 4y + 1 \geq p^{\alpha_p - 2}. \tag{2.1.2}$$

この上で,

$$P := \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv -1 \pmod 4}} p^{\alpha_p} \tag{2.1.3}$$

と定める．

また整数 $P_\pm$ を次で定める:

$$(P_+, P_-) := \begin{cases} \left(\dfrac{3P+1}{4}, \dfrac{P-1}{4}\right) & (P \equiv 1 \pmod 4) \\ \left(\dfrac{P+1}{4}, \dfrac{3P-1}{4}\right) & (P \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}.$$

◇

註 2.1.4. このとき確かに組 (P_+, P_-) は整数の組になっている．また $P_\pm$ は合同式 $4P_\pm \equiv \pm 1 \pmod P$ をみたす．これはすぐに用いる重要な事項である．◇

そして "Maier matrix" と呼ばれる集合を次のように定める:

定義 2.1.5. 整数 $P, P_\pm$ は定義 2.1.1 で与えたものとする．

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\pm = \mathcal{M}_\pm(x,y,z) &:= \{1 \le n \le x : n \equiv P_\pm + r \pmod P, 1 \le r \le y\} \\ &= \begin{pmatrix} P_\pm + 1 & P_\pm + 2 & \dots & P_\pm + [y] \\ P + (P_\pm + 1) & P + (P_\pm + 2) & \dots & P + (P_\pm + [y]) \\ 2P + (P_\pm + 1) & 2P + (P_\pm + 2) & \dots & 2P + (P_\pm + [y]) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

と定める．そして, $\mathcal{M}_\pm$ に含まれる二平方和数の数え上げ関数を

$$S^\pm = S^\pm(x,y,z) := \mathrm{card}\{n \in \mathcal{M}_\pm(x,y,z) : n = \square + \square\}$$

と定める．◇

以上の準備の下で次が示される．

定理 2.1.7. [BW00, p.688, Lemme 4.3]

$$s = \frac{\log y}{\log z}$$

と定める．定義 2.1.1, 2.1.5 の記法のもとで次が成り立つ:

$$S^+(x,y,z) = \frac{Bxy}{P\sqrt{\log x}}\left(F(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)$$

$$S^-(x,y,z) = \frac{Bxy}{P\sqrt{\log x}}\left(f(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)$$

ただし O-定数は絶対定数である．◇

主定理はこの定理において

$$y = \log^N x, z = \frac{\log x}{\log\log x}$$

と取ることで示される．（この取り方についての説明はこの章内で後に行う.）

2.2 アイデア

式 (2.1.6) から分かるように集合 $\mathcal{M}_\pm$ は行列状に考えられたものであり, 長さ $[y]$ の短区間が行として, 法 P の算術級数が列として取られたものになっている．主定理が成立する原理を非常に大雑把に言えば,「$\mathcal{M}_\pm$

の列である算術級数中に含まれる二平方和数の分布の評価を用いて, $\mathcal{M}_{\pm}$ の行である各短区間中に含まれる二平方和数の分布を評価している」ということである.

より具体的に, なぜこのアイデアが有効であるのかを見ていこう. まず最初に以下の事実を述べておく:

事実 2.2.1. [Cha68, p.70, Theorem 7.] 正の整数 n を

$$n = 2^a p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k} q_1^{j_1} q_2^{j_2} \cdots q_l^{j_l}$$

と素因数分解する. ただし素因数 $p_1, p_2, ..., p_k$ は 4 で割った余りが 1 になるものであり, $q_1, q_2, ..., q_l$ は 4 で割った余りが 3 になるものであるとする. このとき n が二平方和数になる必要十分条件はすべての $j_1, j_2, ..., j_l$ が偶数であることである. ◇

このことから $\mathcal{M}^{\pm}$ に含まれる二平方和数が多い/少ないことが以下のように予測される:

$\mathcal{M}_{\pm}$ の列ごとの数え上げから

$$S^{\pm} = \sum_{1 \le r \le y} \sum_{\substack{1 \le n \le x \\ n \equiv P_{\pm} + r \pmod{P} \\ n = \square + \square}} 1 \tag{2.2.2}$$

が従う. 式 (2.2.2) の初めの和に係る各 r について, それぞれ P が奇数であることと $4P_{\pm} \equiv \pm 1 \pmod{P}$ から

$$(n, P) = (P_{\pm} + r, P) = (4P_{\pm} + 4r, P) = (4r \pm 1, P) \tag{2.2.3}$$

が成り立つ. いま

$$p^{\beta} || (n, P) \quad (\beta > 0) \tag{2.2.4}$$

とすれば, これは式 (2.2.3) より $p^{\beta}||(4r \pm 1, P)$ $(\beta > 0)$ と同値であるから $p^{\beta} \le 4r \pm 1 \le 4y + 1$ が成立する. 一方で P の定義から $q^{\alpha}||P \Rightarrow \alpha > 4y + 1$ であったから $p^{\beta+1}|P$ が成り立つ. つまり (2.2.4) であれば $p^{\beta}||n,\ p|P$ であるということだが, 再び P の定義から p は 4 で割って 3 余る素数になる. よって事実 2.2.1 から (2.2.4) を満たす各 p と $\beta > 0$ に対して β は偶数であるか, さもなければ n が二平方和数ではないということになる.

つまり

$$p^{\beta} || (4r \pm 1, P) \quad (\beta > 0)$$

を満たす各 p ごとに, 剰余類 $\{n \equiv P_{\pm} + r \pmod{P}\}$ に含まれる整数が二平方和数になりうるかの判定基準が与えられている. $(4r + 1, P) > 1$ が起こりづらいことから集合 $\mathcal{M}_{+}$ に含まれる二平方和数が多いことが期待され, 逆に $(4r - 1, P) > 1$ が起こりやすいことから集合 $\mathcal{M}_{-}$ に含まれる二平方和数が少ないことが期待される.

ここで今度は $\mathcal{M}_{\pm}$ を行ごとに考える. 仮に $\mathcal{M}_{\pm}$ の各短区間に含まれる二平方和数の個数がすべて主定理 1.1.11 に反するとすれば, 前段落で述べた「$\mathcal{M}_{\pm}$ に含まれる二平方和数の過剰/不足」と矛盾するから, 少なくとも $\mathcal{M}_{\pm}$ の一つの短区間は二平方和数を多く/少なく含んでいることになる. このような鳩の巣原理を用いた議論によって, 短区間における二平方和数の分布の不規則性が示される. 特にこの議論を $\mathcal{M}_{\pm}(x, y, z) - \mathcal{M}_{\pm}(x/2, y, z)$ に用いることで, 列 $\{x^{\pm}\}$ が発散する無限列であることが示される. (厳密な議論は 9.2 節で与える.)

2.3 証明の流れ

算術級数中の二平方和数の分布を評価する主張として次の補題が用いられる:

補題 2.3.1. [Iwa76, p.73, COROLLARY 1.][Rie65, p.200, Satz 1.] $k>0$ を整数, l を

$$(k,l)=1,\quad l\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,(4,k))$$

を満たす整数とする. このとき k によらず,

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n=\square+\square}} 1=\frac{(4,k)}{(2,k)k}\prod_{\substack{p|k\\ p\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{Bx}{\sqrt{\log x}}\left(1+O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{\log 2k}{\log x}\right)^{1/5}\right)$$

が成立する.

さらに k が固定されたとき, 誤差項の指数 $1/5$ は 1 に変えられる. ◇

誤差項を含まない結果は 1954 年に導かれている ([Pra53]), 今回この主張を用いる上で特に重要なのは k が固定されない場合の誤差項の結果である. x の増大につれて誤差項が減少していくことから, Maier matrix の行数が大きくなっていくことが好都合である. 実際に Maier matrix の行数が発散することで, 主定理における無限列が取られることの保証となる.

この k が固定されない場合の結果の導出にふるい法が用いられているため, 本論文の主張を導くためにふるい法は欠かせない理論となっている. この詳細は 5, 6 章で述べる.

ここで単に式 (2.2.2) にこの補題 2.3.1 は, 条件が合致せず適用されないことに注意しなければならない. 前節の議論に更に考察を加えて, 4^{-1} を $\mathbb{Z}/(P/d^2)\mathbb{Z}$ における 4 の逆元として,

$$S^{\pm}=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le u\le(4y\pm1)/d^2\\ u\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}}\sum_{\substack{1\le m\le x/d^2\\ m\equiv 4^{-1}u\,(\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ m=\square+\square}} 1 \tag{2.3.2}$$

と変形して補題 2.3.1 が用いられる (式 (2.3.2) の 2 番目の和の条件 $(u,P)=1$ によって正当化されている).

$$R^{\pm}:=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le u\le(4y\pm1)/d^2\\ u\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}} 1 \tag{2.3.3}$$

と定めて, 補題 2.3.1 と $p^{\alpha}||P\Rightarrow \alpha-2\le 4y+1$ から

$$S^{\pm}=R^{\pm}\prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{Bx}{P\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}+\frac{\log y}{\log x}\right)\right)$$

が従う.

和 (2.3.3) において, u の各素因数が z を越えるかどうかによって考察を加えることで

$$R^{\pm}=\sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} A\left(\frac{4y\pm1}{b},z\right)+O\left(B^{\pm}(4y\pm1,z)\right)$$

という変形が導かれる．ここで以下の定理の適用と, いくつかのまとまった計算を行うことで定理 2.1.7 が示される:

定理 2.3.4. [BW00, p.676, Theorem 2] $y, z \in \mathbb{R}, y \geq 2, z \geq 2$ とする．$\sigma(s)$ は $s > 0$ で定まるある実関数として,

$$A(y,z) = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log y}{\log z}\right)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{y}{\log z} + \frac{y}{\log^{3/2} y}\right)$$

が成り立つ．($\sigma(s)$ の定義は 4 章で, 証明は 8 章で行う.) ◇

定理 2.3.5. [BW00, p.685, Lemma 4.1] $y \geq z \geq 2$ とする．$\omega(s)$ は $s \geq 1$ で定まるある実関数として,

$$B^{\pm}(y,z) = \frac{\omega(u)y - z}{2\log z} + O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{y}{\log^2 z}\right)$$

である．ただし $u = \dfrac{\log y}{\log z}$ と定めている．($\omega(s)$ の定義は 4 章で, 証明は 7 章で行う.) ◇

後回しとなったが, 定理 2.1.7 から主定理を導く際の y, z の取り方について説明する．y については, これが考える短区間の長さであったから, $y = \log^N x$ と取ることが自然に求められる．

z については, 定理 2.1.7 の因子

$$\left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)$$

から, 誤差項が $x \to +\infty$ において減少するように $z = o(\log x)$ が必要である．一方で因子

$$\left(F(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right), \left(f(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)$$

において $F(s) - 1, f(s) - 1$ が $x \to +\infty$ で誤差項に含まれてはいけないから,

$$s = \frac{\log y}{\log z} = \frac{N \log\log x}{\log z}$$

が増加しないように z は x の関数として増加しなければならない．

以上を満たす z の取り方として $z = \log x / \log\log x$ が充分ということになる．

3 準備事項

この章では論文全体を通して用いる基礎的な知識・技術を整理する．3.1 節では部分和法および Riemann-Stieltjes 積分について述べ, 特に本論文で多用する形の和の評価を与える．3.2 節では二平方和数の基本的な性質について述べ, 本論文冒頭に述べた Landau の, 大域的な二平方和数の分布についての主張を示す．

3.1 部分和法とその活用

まず部分和法と呼ばれる計算技法について述べる:

事実 3.1.1 (部分和法/Partial Summation). [Cha68, p.78, THEOREM 6(ABEL)] $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$ を正の無限大に発散する実数列とする．また $\{a_n\}$ を任意の複素数列とする．

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$$

とし, $\phi(x)$ を $x \geq 0$ で定められた複素数値関数とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \phi(\lambda_n) = A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)(\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n))$$

が成り立つ．さらに $\phi(x)$ が $x \geq 0$ で C^1 級ならば, $x \geq \lambda_1$ において

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n \phi(\lambda_n) = A(x)\phi(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(t)\phi'(t)dt$$

が成り立つ． ◇

次に Riemann-Stieltjes 積分について述べる．

定義 3.1.2. [Kou19, pp.336–337] 2 つの関数 $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ と, $[a,b]$ の分割 $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ を与える． そして分割の各区間から代表点 $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ $(\xi_j \in [x_{j-1}, x_j])$ を取る．このとき α と P , および $\boldsymbol{\xi}$ による f の Riemann-Stieltjes 和を

$$S(f, \alpha; P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}))$$

と定める．

この状況でさらに次の性質を満たす実数 I が存在したとする：

「 任意の $\epsilon > 0$ を与えたとき，ある分割 P_ϵ が取れて, この P_ϵ の細分たる任意の分割 P について

$$|S(f, \alpha; P, \boldsymbol{\xi}) - I| < \epsilon$$

を満たす事ができる．」

このとき f は ($[a,b]$ 上) α について積分可能といい, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ と書く．この実数 I を α についての f の Riemann-Stieltjes 積分といい,

$$I = \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

と書く． ◇

ここで有界変動関数について補足する．

定義 3.1.3. [Kou19, pp.336–337] $\mathcal{P}$ は $[a,b]$ の分割全体をわたるものとする．関数 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ の全変動 $V(\alpha)$ を

$$V(\alpha) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} |\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})|$$

と定める．このとき α が有界変動であるとは,

$$V(\alpha) < +\infty$$

であることを指す． ◇

事実 3.1.4 (Riemann-Stieltjes 積分). [Kou19, pp.336–337] $f, g, \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．

1. $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ であれば $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(\alpha)$ であり,
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) d\alpha = \lambda \int_a^b f d\alpha + \mu \int_a^b g d\alpha$$
である.
2. $f \in \mathcal{R}(\alpha) \cap \mathcal{R}(\beta)$ であれば $f \in \mathcal{R}(\lambda\alpha + \mu\beta)$ であり,
$$\int_a^b f d(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda \int_a^b f d\alpha + \mu \int_a^b g d\alpha$$
である.
3. f が連続かつ α が有界変動ならば $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ である.
4. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ ならば $\alpha \in \mathcal{R}(f)$ であり,
$$\int_a^b f d\alpha = [f(x)\alpha(x)]_{x=a}^b - \int_a^b \alpha df$$
が成り立つ.
5. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ かつ α が $[a, b]$ 上 C^1 級であるならば, Riemann 積分 $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ が存在して,
$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$
である.
6. α が階段関数であり, その不連続点が有限個の点 $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ であったとする. このときの各不連続点 x_j での値の差を $\Delta\alpha_j := \alpha(x_j^+) - \alpha(x_j^-)$ と表すことにする. さらに各 x_j において f と α の少なくともどちらか一方が右連続および左連続を満たすとしたとき,
$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{j=1}^n f(x_j)\Delta\alpha_j$$
である.

◇

ここから, 特に今後多用する $\sum f(p)/p$ という形の和の評価を扱う.

事実 3.1.5 (Siegel–Walfisz の定理). [Ten15, p.376] $k, l \in \mathbb{Z}$ は $(k, l) = 1$ を満たすとする. このとき固定された k について
$$\pi(x; k, l) = \frac{\mathrm{Li}(x)}{\phi(k)} + O\left(\frac{x}{\exp(\sqrt{\log x})}\right)$$
が成立する. ◇

素数定理 1.1.1 とこれを用いて次の主張を示す:

補題 3.1.6 (Mertens の定理). $x \geq 2$ に対して, C, C' をある正定数として任意の $a \geq 1$ について次の評価

が成り立つ:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)$$
$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\log\log x+C'+O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)$$

◇

証明. 2 式の証明は同様に進むので後者のみ示す．事実 3.1.5 より

$$R(x):=\pi(x;4,1)-\frac{\mathrm{Li}(x)}{2}=O\left(\frac{x}{\exp(\sqrt{\log x})}\right)$$

とする．

ここで, 任意の $a\ge 1$ に対して $\exp(-\sqrt{\log x})$ と $\log^{-a} x$ を比較すると, 双方 log を取って

$$\log\exp\left(-\sqrt{\log x}\right)=-\sqrt{\log x},\quad \log\log^{-a} x=-a\log\log x$$

だから, $x\to+\infty$ において $\exp(-\sqrt{\log x})\ll\log^{-a} x$ が成り立つ．

つまり, 任意の $a\ge 1$ について

$$R(x)=O\left(\frac{x}{\log^a x}\right)$$

が成り立っている．

このとき Riemann-Stieltjes 積分を用いて

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p}&=\sum_{2\le n\le x}\frac{\pi(n;k,l)-\pi(n-1;k,l)}{n}\\
&=\int_2^x\frac{1}{t}d(\pi(t;4,1))\\
&=\int_2^x\frac{1}{t}d\left(\frac{\mathrm{Li}(t)}{2}\right)+\int_2^x\frac{1}{t}dR(t)\\
&=\frac{1}{2}\int_2^x\frac{dt}{t\log t}+\int_2^x\frac{1}{t}d(R(t))\\
&=\frac{1}{2}[\log\log t]_{t=2}^x+\left[\frac{R(t)}{t}\right]_{t=2}^x+\int_2^x\frac{R(t)}{t^2}dt\\
&=\frac{1}{2}\log\log x-\frac{1}{2}\log\log 2+\frac{R(x)}{x}-\frac{R(2)}{2}+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t^2}dt-\int_x^\infty\frac{R(t)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

と変形される．

ここで

$$\int_x^\infty\frac{R(t)}{t^2}dt=O\left(\int_x^\infty\frac{dt}{t\log^a t}\right)=O\left(\frac{1}{\log^{a-1} x}\right),$$

また

$$\frac{R(x)}{x}=O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)$$

となるから,

$$C' = -\frac{\log\log 2}{2} - \frac{R(2)}{2} + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t^2}dt$$

として

$$\sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}\log\log x + C' + O\left(\frac{1}{\log^{a-1} x}\right)$$

が従う. a は任意であったから題意が従う.

□

補題 3.1.7. $f(x)$ を区間 $[z, z_1]$ 上の C^1 級関数とすれば, 任意の $a \ge 1$ に対して

$$\sum_{z<p\le z_1} \frac{f(p)}{p} = \int_z^{z_1} \frac{f(x)}{x\log x}dx + O\left(\frac{f(z)}{\log^a z} + \frac{f(z_1)}{\log^a z_1}\right) + O\left(\int_z^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx\right)$$

$$\sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{f(p)}{p} = \int_z^{z_1} \frac{f(x)}{2x\log x}dx + O\left(\frac{f(z)}{\log^a z} + \frac{f(z_1)}{\log^a z_1}\right) + O\left(\int_z^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx\right)$$

が成り立つ. ◇

証明. これもやはり後者のみ示す. 補題 3.1.6 より

$$S(x) := \sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}\log\log x + C' + O\left(\frac{1}{\log^a x}\right),$$

$$R(x) := S(x) - \frac{1}{2}\log\log x - C'$$

とおけば部分和法から

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{f(p)}{p} &= [f(x)S(x)]_{x=z}^{z_1} - \int_z^{z_1} f'(x)S(x)dx \\
&= \left[f(x)\left(\frac{\log\log x}{2} + C' + R(x)\right)\right]_{x=z}^{z_1} - \int_z^{z_1} f'(x)\left(\frac{\log\log x}{2} + C' + R(x)\right)dx \\
&= \left[f(x)\left(\frac{\log\log x}{2} + C'\right)\right]_{x=z}^{z_1} + [f(x)R(x)]_{x=z}^{z_1} \\
&\quad - \left(\left[f(x)\left(\frac{\log\log x}{2} + C'\right)\right]_{x=z}^{z_1} - \int_z^{z_1} \frac{f(x)}{2x\log x}dx + \int_z^{z_1} f'(x)R(x)dx\right) \\
&= \int_z^{z_1} \frac{f(x)}{2x\log x}dx + O\left(\frac{f(z)}{\log^a z} + \frac{f(z_1)}{\log^a z_1}\right) + O\left(\int_z^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx\right)
\end{aligned}$$

である.

□

3.2 大域的な二平方和数の漸近挙動

Landau の主張を示すために以下を用いる:

事実 3.2.1. [雪江 14, p.211, 定理 5.5.3] K を代数体とする．Δ_K を K の判別式, r_1, r_2 をそれぞれ K の実素点と複素素点の個数, h を K の類数, R を K の単数基準, e を K に含まれる 1 の冪根の個数とする．このとき Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ について

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{\sqrt{|\Delta_K|}e}$$

が成り立つ． ◇

事実 3.2.2 ((拡張された)Wiener-池原の定理). [Kab08, p.145, THEOREM 2.] 数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して生成関数を

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

とする．また定数 $N > 0$ に対して $\mathbb{C}$ 上の領域とその閉包

$$\Pi = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > N\}, \quad \overline{\Pi} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq N\}$$

を定める．

ある整数 $m \geq 1$ と実数 $A > 0$ について級数 $L(s)$ が次の 2 つの条件を満たすとする:

- Π 上で広義一様絶対収束している．
- $L(s)^m$ は $\overline{\Pi}$ を含む領域に有理型接続され, $s = N + t\sqrt{-1}\,(t \in \mathbb{R})$ で極は $s = N$ のみである．また $L(s)^m$ は $s = N$ で 1 位の極を持ち, $s = N$ における留数が A^m である．

このとき

$$\sum_{n \leq x} a_n \sim \frac{A}{N\Gamma(1/m)} x^N \log^{(1-m)/m} x$$

が成り立つ． ◇

命題 3.2.3 (定理 1.1.7 再掲)**.**

$$B(x) \sim \frac{Bx}{\sqrt{\log x}}$$

ただし定数 B は

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{q \equiv -1 \pmod 4} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)^{-1/2}$$

とおいている． ◇

証明. $b(n)$ は定義 1.1.5 で定めたものとする．事実 2.2.1 から $b(n)$ に対応する Dirichlet 級数は

$$\begin{aligned}
\beta(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(s)}{n^s} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \cdots\right) \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) \prod_{q \equiv -1 \pmod 4} \left(1 + \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{q^{4s}} + \cdots\right) \\
&= (1 - 2^{-s})^{-1} \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{q \equiv -1 \pmod 4} (1 - q^{-2s})^{-1}
\end{aligned}$$

と表される.

一方で, χ_4 を法 4 の非自明な Dirichlet 指標とすれば, $\Re(s) > 1$ において

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1-2^{-s})^{-1} \prod_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-p^{-s})^{-1} \prod_{q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-q^{-s})^{-1}$$

$$L(s, \chi_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-p^{-s})^{-1} \prod_{q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1+q^{-s})^{-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} \beta(s)^2 &= (1-2^{-s})^{-1} \zeta(s) L(s, \chi_4) \prod_{q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-q^{-2s})^{-1} \\ &= (1-2^{-s})^{-1} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s) \prod_{q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-q^{-2s})^{-1} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

が成立する. このとき $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s)$ の有理型接続を考えれば, (3.2.4) 式最右辺は $\Re(s) > 1/2$ に有理型接続される. これをもって延長された $\beta(s)^2$ は $\Re(s) > 1/2$ において $s = 1$ のみを極としてもち, 留数は

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=1} \beta(s)^2 &= \frac{1}{1-(1/2)} \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s) \prod_{q \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \frac{1}{1-q^{-2}} \\ &= 2 \cdot \frac{2^0 (2\pi)^1 1 \cdot 1}{\sqrt{|-4|}4} \cdot 2B^2 \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2B^2 \\ &= B^2 \pi \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

である. よって事実 3.2.2 から

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{n \le x} b(x) &\sim \frac{B\sqrt{\pi}}{1 \cdot \Gamma(1/2)} x (\log x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Bx}{\sqrt{\log x}} \end{aligned}$$

が導かれ主張が示される. □

以上に関連して, ここからは定理 2.1.7 を導く際に必要な評価を準備する.

命題 3.2.6. χ_4 を法 4 における非自明な Dirichlet 指標としたとき,

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right)^{-1} = \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

が成立する.

証明のために 2 つ補題を準備する.

補題 3.2.7. [Lan53, pp.446–449] ある $a \in \mathbb{R}$ について

$$\sum_{p \le x} \frac{\chi_4(p)}{p} = a + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

が成立する. ◇

証明. 以下 $L(s,\chi_4)$ を $L(s)$ と略記する．$s>1$ において

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^s}$$

は項別微分可能だから,

$$-L'(s)=-\frac{L'(s)}{L(s)}L(s)$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)\log n}{n^s}=\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_4(p^m)\log p}{p^{ms}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^s}$$

が成り立つ．この等式が級数同士の等式として成立しているから左辺と右辺で各 n^s の係数は一致する．よって左辺と右辺で $n\leq x$ までの部分和をとっても一致し, 部分和だから $s=1$ としてもよい．つまり

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\chi_4(n)\log n}{n}&=\sum_{p^m n\leq x}\frac{\chi_4(p^m n)\log p}{p^m n}\\&=\sum_{p^m\leq x}\frac{\chi_4(p^m)\log p}{p^m}\sum_{n\leq x/p^m}\frac{\chi_4(n)}{n}\end{aligned}$$

が従う．

また [Roy90, p.291] より

$$\sum_{n\leq x}\frac{\chi_4(n)}{n}=\frac{\pi}{4}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

であるから (誤差項は交代級数であることから直ちに従う),

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\chi_4(n)\log n}{n}&=\sum_{p^m\leq x}\frac{\chi_4(p^m)\log p}{p^m}\left(\frac{\pi}{4}+O\left(\frac{p^m}{x}\right)\right)\\&=\frac{\pi}{4}\sum_{p^m\leq x}\frac{\chi_4(p^m)\log p}{p^m}+O\left(\frac{1}{x}\sum_{p^m\leq x}\log p\right)\\&=\frac{\pi}{4}\left(\sum_{p\leq x}\frac{\chi_4(p)\log p}{p}+\sum_{\substack{p^m\leq x\\ m\geq 2}}\frac{\chi_4(p^m)\log p}{p^m}\right)+O(1)\\&=\frac{\pi}{4}\sum_{p\leq x}\frac{\chi_4(p)\log p}{p}+O(1)\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

が成り立つ．ただし三つ目の等号で

$$\sum_{p^m\leq x}\log p=O(x)$$

を用いた．部分和法より

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\chi_4(n)\log n}{n}&=\left[\frac{\log t}{t}\sum_{n\leq t}\chi_4(n)\right]_{t=2}^{x}-\int_2^x\left(\frac{\log t}{t}\right)'\sum_{n\leq t}\chi_4(n)dt\\&=O\left(\frac{\log x}{x}\right)+O\left(\int_2^x\left(\frac{\log t}{t}\right)'dt\right)\\&=O(1)\end{aligned}$$

だから, 式 (3.2.8) より

$$\sum_{p \le x} \frac{\chi_4(p) \log p}{p} = O(1)$$

が導かれる.

ここにおいて再び部分和法から

$$\begin{aligned}
\sum_p \frac{\chi_4(p)}{p} &= \sum_p \frac{\chi_4(p) \log p}{p} \frac{1}{\log p} \\
&= \left[\frac{1}{\log t} \sum_{p \le t} \frac{\chi_4(p) \log p}{p} \right]_{t=3}^{\infty} + \int_3^{\infty} \frac{1}{t \log^2 t} \sum_{p \le t} \frac{\chi_4(p) \log p}{p} dt \\
&= O(1) + O\left(\int_3^{\infty} \frac{dt}{t \log^2 t} dt \right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

より, ある $a \in \mathbb{R}$ が取れて

$$\sum_p \frac{\chi_4(p)}{p} = a$$

が成り立つ.

また

$$\begin{aligned}
\sum_{x \le p} \frac{\chi_4(p)}{p} &= \left[\frac{1}{\log t} \sum_{p \le t} \frac{\chi_4(p) \log p}{p} \right]_{t=x}^{\infty} + \int_x^{\infty} \frac{1}{t \log^2 t} \sum_{p \le t} \frac{\chi_4(p) \log p}{p} dt \\
&= O\left(\frac{1}{\log x} \right)
\end{aligned}$$

となって題意が導かれる. □

補題 3.2.9.

$$\prod_p \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p} \right)^{-1} = \frac{\pi}{4}$$

◇

証明. (3.2.4) 式で見られたとおり

$$L(s) = \frac{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s)}{\zeta(s)}$$

であり, (3.2.5) 式より

$$L(1) = \frac{\mathrm{Res}(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}, 1)}{\mathrm{Res}(\zeta, 1)} = \frac{\pi}{4}$$

である.

L 関数の Euler 積表示

$$L(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s} \right)^{-1}$$

は $\Re(s) > 1$ で正則関数として成立しているが, 右辺の無限積は $\Re(s) = 1$ で収束するから [小山 15, p.208 定理 5.5], 両辺で極限 $s \to +1$ を取り主張が導かれる.

□

定理 3.2.6 の証明.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{p\le x}\left(\log\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)+\frac{\chi_4(p)}{p}\right)\right| &= \left|\sum_{p\le x}\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi_4(p)^m}{mp^m}+\frac{\chi_4(p)}{p}\right)\right| \\
&= \left|-\sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\chi_4(p)^m}{mp^m}\right| \\
&\le \sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{mp^m} \\
&\le \sum_{p\le x}\frac{1}{2p(p-1)} \\
&\le \sum_{p\le x}\frac{1}{p^2} < \zeta(2)
\end{aligned}$$

が成り立つから, この和はある有限の値 b に収束し, その収束速度は $O(x^{-1})$ で評価される.

これと補題 3.2.7 から

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right) &= b-a+O\left(\frac{1}{\log x}\right), \\
\prod_{p\le x}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right) &= e^{b-a}\exp\left(O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \\
&= C\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)
\end{aligned}$$

が従う. ただし $C=\exp(b-a)$ とした.

よって補題 3.2.9 から

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)^{-1}=\frac{\pi}{4}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

が示された. □

4 差分微分方程式の定める関数とその性質

この章では差分微分方程式が定める関数を更に用意し, $F(s), f(s)$ に関する技術的主張を述べる. 4.1 節では関数 $\omega(s), \sigma(s)$ を定義し, それらの持つ性質を紹介する. 4.2 節では関数 $F(s), f(s)$ を $\omega(s), \sigma(s)$ を用いて表す.

4.1 関数 $\omega(s), \sigma(s)$

まず rough な整数の分布を記述するために次の関数 $\omega(s)$ を導入する:

定義 4.1.1. $s\ge 1$ において関数 $\omega(s)$ を

$$\begin{aligned}
s\omega'(s) &= \omega(s-1)-\omega(s) \quad (s>2) \\
s\omega(s) &= 1 \quad (1\le s\le 2)
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

という差分微分方程式と初期条件を満たすの唯一の連続関数として定める． ◇

註 4.1.3. 後に便宜上 $0 < s < 1$ において $\omega(s) = 0$ とすることがある．これは差分微分方程式の式 (4.1.2) そのものとは両立しないことに注意する． ◇

事実 4.1.4. [Ten15, p.562, p.563 Corollary6.5. Theorem6.6.] $\omega(s)$ は $s > 1$ で非負値で $|\omega'(s)| \leq 1$ を満たし，s が大きくなるとき

$$\omega(s) = e^{-\gamma} + O(e^{-s \log s}) \tag{4.1.5}$$

が成り立つ． ◇

関数 $\omega(s)$ による rough な整数の分布の記述は 7 章で行う．

次に smooth な二平方和数の分布を記述するために次の関数 $\sigma(s)$ を導入する:

定義 4.1.6. $s > 0$ において関数 $\sigma(s)$ を

$$s\sigma'(s) = -\frac{1}{2}(\sigma(s) + \sigma(s-1)) \quad (s > 1) \tag{4.1.7}$$

$$\sigma(s) = s^{-1/2} \quad (0 < s \leq 1) \tag{4.1.8}$$

という差分微分方程式と初期条件を満たすの唯一の連続関数として定める． ◇

この定義から

$$\sigma(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}(1 - \log(\sqrt{s} + \sqrt{s-1})) = 1 - \sqrt{s-1} + O(s-1) \quad (1 \leq s \leq 2) \tag{4.1.9}$$

が導かれる．

事実 4.1.10. [AO65, pp.38–39][FI10, p.516] $s > 0$ において $\sigma(s)$ は正値かつ単調減少であり，$s = 1$ を除いては C^1 級である．さらに s が大きくなるとき

$$\sigma(s) = O(e^{-s \log s})$$

が成り立つ．また

$$\int_0^\infty \sigma(t) dt = \sqrt{\pi e^\gamma} \tag{4.1.11}$$

が成り立つ． ◇

関数 $\sigma(s)$ による smooth な二平方和数の分布の記述は 8 章で行う．

ここで観念的な説明にはなるが，差分微分方程式が用いられる理由を述べておく．ある整数論的意味合いを持つ関数 $D(x, y)$ が「1 以上 x 以下であり，さらに素因数の大きさについて y が条件をもたらしている」何らかの特徴を持った整数の数え上げ関数とする．

このとき Wiener-池原の定理 (事実 3.2.2) の結果を参照し，$y = x$ においてはある正定数 C を用いて

$$D(x, x) \sim \frac{Cx}{\log^a x}$$

となるならば，ある関数 $\delta(s)$ を用いて

$$D(x, y) \sim \delta\left(\frac{\log x}{\log y}\right) \frac{x}{\log^a y}$$

と近似されると期待したい．つまり $\delta(s)$ が補正として働くように期待しており，また変数として $\log x/\log y$ を取るのは，$u=\log x/\log y \Leftrightarrow y=x^{1/u}$ から y が素因数にかけている制約を見やすくするためである．

さらに $D(x,y)$ が **Buchstab 型**の恒等式

$$D(x,y)=D(x,\sqrt{x})-\sum_{y<p\le\sqrt{x}} D\left(\frac{x}{p},p\right)$$

を満たすとする．(p の上限として今は $\sqrt{x}$ を取っているが，これは本来 $\delta(s)$ が滑らかになるであろう範囲と関連して取られる.)

このとき恒等式に期待される近似を代入して，

$$\delta\left(\frac{\log x}{\log y}\right)\frac{x}{\log^a y}\sim\delta\left(\frac{\log x}{\log\sqrt{x}}\right)\frac{x}{\log^a\sqrt{x}}-\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\delta\left(\frac{\log x}{\log p}-1\right)\frac{x/p}{\log^a p}$$

を得たとしよう．ここで

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\delta\left(\frac{\log x}{\log p}-1\right)\frac{1}{p\log^a p}&=\frac{1}{\log^a x}\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{\log p}\right)^a\delta\left(\frac{\log x}{\log p}-1\right)\frac{1}{p}\\&=\frac{1}{\log^a x}\int_2^s u^a\delta(u-1)d\left(\sum_{x^{1/u}<p\le x}\frac{1}{p}\right)\\&\sim\frac{1}{\log^a x}\int_2^s u^{a-1}\delta(u-1)du\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{\log x}{\log y}\right)\frac{1}{\log^a y}&\sim\frac{\delta(2)2^a}{\log^a x}+\frac{1}{\log^a x}\int_2^s u^{a-1}\delta(u-1)du\\&=\frac{1}{\log^a x}\left(\delta(2)2^a+\int_2^s u^{a-1}\delta(u-1)du\right)\end{aligned}$$

を得る．

これが等式であると期待すれば，$s=\log x/\log y$ とおいて

$$s^a\delta(s)=\delta(2)2^a+\int_2^s u^{a-1}\delta(u-1)du$$

となる．両辺を s で微分して

$$(s^a\delta(s))'=s^{a-1}\delta(s-1)$$

の成立が期待される．

4.2 $F(s), f(s)$ と $\omega(s), \sigma(s)$ の関連

以下この章の残りでは次の定理の証明を行う．

定理 4.2.1. [BW00, p.676, Theorem 3] $s>0$ に対して，

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}}F(s)&=2\sigma(s)+\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt\\\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}}f(s)&=\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt\end{aligned}$$

が成り立つ. ◇

この定理から, 関数 $F(s), f(s)$ の性質と関数 $\omega(s), \sigma(s)$ の性質を関連付けることができる. 定理 4.2.1 は以下の 2 つの補題から直ちに示される.

補題 4.2.2. [BW00, p.682, Lemma 3.1] 各 $s > 0$ において

$$F(s) - f(s) = 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\sigma(s) \tag{4.2.3}$$

である. ◇

補題 4.2.4. [BW00, p.682, Lemma 3.2] 各 $s > 0$ について

$$F(s) + f(s) = 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\left(\sigma(s) + \int_0^s \omega(t)\sigma(s-t)dt\right)$$

である. ◇

補題 4.2.2 の証明. $0 < s \le 1$ においては $F(s), f(s)$ の定め方 ((1.1.10), (4.1.8)) から (4.2.3) が従う.

$1 < s \le 2$ においては, (1.1.9) から

$$\left(s^{1/2}f(s)\right)' = \frac{1}{2}s^{-1/2}F(s-1) = \frac{\sqrt{e^\gamma/\pi}}{\sqrt{s(s-1)}}$$

だから, (1.1.10), (4.1.9) より

$$\begin{aligned} s^{1/2}f(s) &= \sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\int_1^s \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} \\ &= 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\log(\sqrt{s} + \sqrt{s-1}) \\ &= 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\left(1 - \sqrt{s}\sigma(s)\right) \end{aligned}$$

となる. 従って再び (1.1.10) から (4.2.3) が従う. ただし

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = 2\log(\sqrt{u} + \sqrt{u-1}) + C$$

を用いた.

$s > 2$ においては (1.1.9) において, まず左辺に Leibniz rule を用いて

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s^{-1/2}F(s) + s^{1/2}F'(s) = \frac{1}{2}s^{-1/2}f(s-1) \\ \frac{1}{2}s^{-1/2}f(s) + s^{1/2}f'(s) = \frac{1}{2}s^{-1/2}F(s-1) \end{cases}$$

を得る. 両辺に $s^{1/2}$ を掛けて

$$\begin{cases} \frac{1}{2}F(s) + sF'(s) = \frac{1}{2}f(s-1) \\ \frac{1}{2}f(s) + sf'(s) = \frac{1}{2}F(s-1) \end{cases}$$

となり, それぞれ左辺第一項を右辺に移項して辺々引けば

$$s\frac{d}{ds}((F-f)(s)) = -\frac{1}{2}((F-f)(s)+(F-f)(s-1))$$

を得る.

以上まとめて $F(s)-f(s)$ は $0 \leq s \leq 2$ で $2\sqrt{e^\gamma/\pi}\sigma(s)$ に一致し, (4.1.7) から $s>2$ において $2\sqrt{e^\gamma/\pi}\sigma(s)$ と同一の差分微分方程式をみたす. それぞれ連続関数として定義されていたから両者は一致する. □

補題 4.2.4 の証明. まず計算の補助のために関数 $\sigma(s), \omega(s)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数として定義を拡張する. 関数 $\sigma(s)$ について, $\sigma(s) \equiv 0$ $(s<0)$ としてやると, (4.1.7), (4.1.8) から

$$s\sigma'(s) = -\frac{1}{2}(\sigma(s)+\sigma(s-1)) \tag{4.2.5}$$

が $s \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ で成り立つ. (本質的なのは $0<s<1$ での成立になる. このときは (4.2.5) は

$$s\sigma'(s) = -\frac{1}{2}\sigma(s)$$

となるが, 実際これは

$$s\sigma'(s) = s(s^{-1/2})' = s\cdot\left(-\frac{1}{2}s^{-3/2}\right) = -\frac{1}{2}s^{-1/2} = -\frac{1}{2}\sigma(s)$$

となって成立する.）

同様に $\omega(s)$ について $\omega(s) \equiv 0$ $(s<1)$ と取れば, (4.1.2) から

$$s\omega'(s) = \omega(s-1)-\omega(s) \tag{4.2.6}$$

が $s \in \mathbb{R}-\{1,2\}$ で成り立つ. （やはりこの場合も $1<s<2$ の場合が本質的になる. このとき示したいのは

$$s\omega'(s) = -\omega(s)$$

だが, 実際

$$s\omega'(s) = s\cdot\left(\frac{1}{s}\right)' = -\frac{1}{s} = -\omega(s)$$

となって成立する.）

後々のために $\sigma'(1)=1/2, \omega'(1)=-1, \omega'(2)=0, \sigma'(0)=\omega'(0)=0$ と定めてやる. （これは $\omega'(2)=0$ を除けば (4.2.5), (4.2.6) が成り立つように拡張している. また $\omega'(2)=0$ は $\omega'(2-0)=-1/4, \omega(2+0)=1/4$ の平均を取っている. ）これはあくまで表記的な問題であることに注意する.

実関数 $G(s)$ を次で定める:

$$G(s) = \sigma(s)+\int_0^s \omega(t)\sigma(s-t)dt \tag{4.2.7}$$

このとき $\omega(s) \equiv 0$ $(s<1)$ より $s \leq 0$ では $G(s) \equiv 0$, $0<s\leq 1$ では $G(s)=s^{-1/2}$ となる. 定理の主張はすなわち

$$F(s)+f(s) = 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}G(s)$$

である.

さて $0 < s \leq 1$ では $F(s) + f(s) = 2\sqrt{e^\gamma/\pi}G(s)$ が従うので, あとは $G(s)$ が $F(s) + f(s)$ と同じ差分微分方程式を満たすことが示されればいい.

$1 < s \leq 2$ では (1.1.9), (1.1.10) から

$$(s^{1/2}F(s))' = \frac{1}{2}s^{-1/2}f(s-1) \ (= 0),$$

従って

$$\begin{aligned}
(s^{1/2}(F+f)(s))' &= \frac{1}{2}s^{-1/2}(F+f)(s-1) \\
\frac{1}{2}s^{-1/2}((F+f)(s)) + s^{1/2}(F+f)'(s) &= \frac{1}{2}s^{-1/2}(F+f)(s-1) \\
s(F+f)'(s) &= -\frac{1}{2}\left((F+f)(s) - (F+f)(s-1)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ.（これは (1.1.9) より $s > 2$ でも成り立つ.）

つまり $s > 1$ において

$$sG'(s) = -\frac{1}{2}(G(s) - G(s-1)) \tag{4.2.8}$$

を導けばよい. $s > 1$ において

$$I(s) = \frac{d}{ds}\int_0^s \omega(t)\sigma(s-t)dt \tag{4.2.9}$$

とおく. これは $G(s)$ の積分で表示された部分の s に関する微分である. このとき $t = su$ と変換して

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{d}{ds}\left(s\int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du\right) \\
&= \int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du + s\frac{d}{ds}\int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du
\end{aligned}$$

となる.

ここで微分と積分の交換を行い計算を進めたいが, $\sigma(s), \omega(s)$ について次のことに注意しなければならない.

- $\omega(s)$ は $s = 1$ で不連続である.
- $\omega'(s)$ は $s = 2$ で不連続である.
- $\sigma(s)$ は $s \to +0$ で $+\infty$ に発散する.
- $\sigma'(s)$ は $s \to 1+0$ で $+\infty$ に発散する.

これらに注意して以下 $3 < s$, $2 < s \leq 3$, $1 < s \leq 2$ という場合分けの下で積分と微分の交換を考える. 用いる主張は以下の二つである:

事実 4.2.10 (Leibniz integral rule). [高木 83, pp.164–165] $f(x,\alpha), \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ が $a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ において連続, また $u(\alpha), v(\alpha)$ は α について $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ において微分可能とすれば, $a \leq u \leq b, a \leq v \leq b$ であるとき

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{v(\alpha)}^{u(\alpha)} f(x,\alpha)dx = \int_{v(\alpha)}^{u(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha}f(x,\alpha)dx + f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha} - f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}$$

が従う. ◇

事実 4.2.11 (測度論的積分記号下の微分). [伊藤 63, p.98 定理 14.2] 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ があり，関数 $f(x, \alpha), (x \in X, a < \alpha < b)$ は x の関数としては X の上で可積分，α の関数としては微分可能とし，また X の上で積分可能な関数 $\phi(x)$ が存在して $X \times (a, b)$ の上で $|f_\alpha(x, \alpha)| \leq \phi(x)$ であるとすると，積分 $\int_x f(x, \alpha) d\mu(x)$ は α の関数として微分可能であって

$$\frac{d}{dx} \int_X f(x, \alpha) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial \alpha}(x, \alpha) d\mu(x)$$

が成り立つ． ◇

(i) $3 < s$ の場合

積分

$$\int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du$$

において上の注意点を順に書き直す．$\omega(su)$ の不連続点は $u = 1/s$ である．$\omega'(su)$ の不連続点は $u = 2/s$ である．$\sigma(s(1-u))$ の発散点は $u = 1$ である．$\sigma'(s(1-u))$ の発散点は $u = 1 - 1/s$ である．いま $3 < s$ としているから，これらの u の値に関して

$$0 < \frac{1}{s} < \frac{2}{s} < \frac{2}{3} < 1 - \frac{1}{s} < 1$$

が成り立っている．よって

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} \int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du \\
&= \frac{d}{ds} \int_{1/s}^{2/s} \omega(su)\sigma(s(1-u))du + \frac{d}{ds} \int_{2/s}^{2/3} \omega(su)\sigma(s(1-u))du \\
&\quad + \frac{d}{ds} \int_{2/3}^{1} \omega(su)\sigma(s(1-u))du
\end{aligned}$$

として，右辺第 1 ・ 2 項には Leibniz integral rule を，右辺第 3 項には測度論的な積分記号下の微分を適用することを試みる．

(ii) $2 < s \leq 3$ の場合

このとき注意すべき各 u の値についての大小関係は

$$0 < \frac{1}{s} < \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{s} \leq \frac{2}{s} < 1$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} \int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du \\
&= \frac{d}{ds} \int_{1/s}^{1/2} \omega(su)\sigma(s(1-u))du + \frac{d}{ds} \int_{1/2}^{1} \omega(su)\sigma(s(1-u))du
\end{aligned}$$

として，右辺第 1 項には Leibniz integral rule を，右辺第 2 項には測度論的な積分記号下の微分を適用することを試みる．

(iii) $1 < s \leq 2$ の場合

このとき注意すべき各 u の値についての大小関係は

$$0 < 1 - \frac{1}{s} \leq \frac{1}{s} < 1 \leq \frac{2}{s}$$

だから, 単に

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du = \frac{d}{ds}\int_{1/s}^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du$$

として Leibniz integral rule を用いることを試みる.

上の場合分けの (i), (ii) において, 測度論的な積分記号下の微分を適用するには,

$$\left|\frac{d}{ds}\omega(su)\sigma(s(1-u))\right| = |u\omega'(su)\sigma(s(1-u)) + (1-u)\omega(su)\sigma'(s(1-u))|$$

がそれぞれの積分区間上で可積分であればよい. 特にこれは $u \to 1 - 1/s - 0, u \to 1 - 0$ における広義積分が有界であることが示されれば良い. 以下十分小さい $\epsilon > 0$ を任意にひとつ与えて固定する.

$$\begin{aligned}
\int_{1-\epsilon}^1 |(1-u)\sigma'(s(1-u))|du &= \int_{1-\epsilon}^1 \left|-\frac{1}{\sqrt{1-u}}\frac{1}{2s\sqrt{s}}\right| du \\
&= \frac{1}{2s\sqrt{s}}\int_{1-\epsilon}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \\
&= \frac{1}{2s\sqrt{s}}\left[-\sqrt{1-u}\right]_{1-\epsilon}^1 \\
&= \frac{\sqrt{\epsilon}}{2s\sqrt{s}} \quad ,
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\int_{1-1/s-\epsilon}^{1-1/s} |(1-u)\sigma'(s(1-u))|du &= \int_{1-1/s-\epsilon}^{1-1/s} \left|(1-u)\left(-\frac{\sigma(s(1-u))}{2s(1-u)} - \frac{1}{2s(1-u)\sqrt{s(1-u)-1}}\right)\right| du \\
&= O(1) + \int_{1-1/s-\epsilon}^{1-1/s} \left|\frac{1}{s^2}\frac{s}{2\sqrt{s(1-u)-1}}\right| du \\
&= O(1) + \frac{1}{s^2}\left[-\sqrt{s(1-u)-1}\right]_{1-1/s-\epsilon}^{1-1/s} \\
&= O(1) + \frac{\sqrt{\epsilon s}}{s^2}
\end{aligned}$$

より各積分は絶対収束している. 以上から微分と積分の交換は正当化される. したがって

$$\begin{aligned}
I(s) &= \int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du + s\frac{d}{ds}\int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du \\
&= \int_0^1 \omega(su)\sigma(s(1-u))du + \frac{\sigma(s-1)}{s} \\
&\quad + \int_{1/s}^1 (su\omega'(su)\sigma(s(1-u)) + s(1-u)\omega(su)\sigma'(s(1-u)))du
\end{aligned}$$

となる.

ここで (4.2.5), (4.2.6) から,

$$
\begin{aligned}
&s\int_{1/s}^{1}(su\omega'(su)\sigma(s(1-u))+s(1-u)\omega(su)\sigma'(s(1-u)))du\\
&=\int_1^s(t\omega'(t)\sigma(s-t)+(s-t)\omega(t)\sigma'(s-t))dt\\
&=\int_1^s(\omega(t-1)-\omega(t))\sigma(s-t)dt-\frac{1}{2}\int_1^s\omega(t)(\sigma(s-t)+\sigma(s-t-1))dt\\
&=\frac{3}{2}\int_1^s\omega(t)\sigma(s-t)dt+\int_1^s\omega(t-1)\sigma(s-t)dt-\frac{1}{2}\int_1^s\omega(t)\sigma(s-t-1)dt\\
&=\frac{3}{2}\int_1^s\omega(t)\sigma(s-t)dt+\int_0^{s-1}\omega(t)\sigma(s-t-1)dt-\frac{1}{2}\int_0^{s-1}\omega(t)\sigma(s-t-1)dt\\
&=\frac{3}{2}\int_1^s\omega(t)\sigma(s-t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{s-1}\omega(u)\sigma(s-1-u)du
\end{aligned}
$$

を得て,

$$
sI(s)=\sigma(s-1)-\frac{1}{2}\int_1^s\omega(t)\sigma(s-t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{s-1}\omega(u)\sigma(s-1-u)du \tag{4.2.12}
$$

が従う.

以上より, (4.2.5), (4.2.7), (4.2.9), (4.2.12) から, $s>1$ において

$$
\begin{aligned}
sG'(s)+\frac{1}{2}G(s)&=s(\sigma'(s)+I(s))+\frac{1}{2}\left(\sigma(s)+\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt\right)\\
&=s\sigma'(s)+\frac{1}{2}\sigma(s)+sI(s)+\frac{1}{2}\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt\\
&=-\frac{1}{2}\left(\sigma(s)+\sigma(s-1)\right)+\frac{1}{2}\sigma(s)\\
&\quad+\left(\sigma(s-1)-\frac{1}{2}\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{s-1}\omega(u)\sigma(s-1-u)du\right)\\
&\quad\ +\frac{1}{2}\int_0^s\omega(t)\sigma(s-t)dt\\
&=\frac{1}{2}\sigma(s-1)+\frac{1}{2}\int_0^{s-1}\omega(t)\sigma(s-1-t)dt\\
&=\frac{1}{2}G(s-1)
\end{aligned}
$$

となり $s>1$ で (4.2.8) が成り立つ. よって主張が示された. □

5 ふるい法 (sieve methods)

この章では, 以降用いられる「ふるい法 (sieve methods)」による主張についてまとめる. 5.1 節ではふるい法で用いられる用語や概念を述べ, 理論の基本的な発想を説明する. 5.2 節では特に「組合せ論的ふるい」と呼ばれるふるいについて説明する. 5.3 節では議論を補助する技術的主張について述べる. 5.4 節では組合せ論的ふるいの一つである Rosser のふるいを導入する.

5.1 ふるい法の概観, 定義

定義 5.1.1. $\mathcal{A}$ を要素が整数である有限集合とし, $\mathcal{P}$ を要素が素数である（有限とは限らない）集合とする.

$$P(z) := \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p$$

という積を取った上で, 次の数え上げ関数を定める:

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) := |\{a : a \in \mathcal{A}, (a, P(z)) = 1\}|.$$

これはつまり集合 $\mathcal{A}$ の元のうち, $\mathcal{P}$ に属する z 未満の素数を素因子に持たないものを数え上げている.

また平方因子を持たない整数 d に対して倍数集合

$$\mathcal{A}_d := \{a : a \in \mathcal{A}, a \equiv 0 \,(\operatorname{mod} d)\}$$

を定める.

$\overline{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{P}$ に属さない素数全体からなる集合とし, $(d, \overline{\mathcal{P}}) = 1$ とは d が $\overline{\mathcal{P}}$ の元すべてと互いに素であることを表すとする. このとき

$$\mu(d) \neq 0, \quad (d, P(z)) = 1, \quad (d, \overline{\mathcal{P}}) = 1$$

という条件を満たす d について次の数え上げ関数を定める:

$$S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z) := |\{a : a \in \mathcal{A}_d, (a, P(z)) = 1\}|.$$

上の条件は関数 $S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z)$ が自明にならないための条件である. ◇

註 5.1.2. $d = 1$ の場合は $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}$ とする. ◇

これらの数え上げ関数はそれぞれ数列 $\mathcal{A}, \mathcal{A}_d$ の元のうち, 集合 $\mathcal{P}$ に属しかつ大きさが z 未満の素数を素因数に持つものを「ふるい落とす」という操作にあたる. ふるい法の目的は, 各 $\mathcal{A}_d$ たちの濃度を「統一的に」近似していくことで, 集合 $\mathcal{A}$ の濃度の効果的な評価を得ることである.

その手段として, まず次のような量たちを定める. $|\mathcal{A}|$ を近似するような

$$X > 1$$

という量が与えられたとする. このときまず全体の剰余項を

$$R_1 := |\mathcal{A}| - X$$

とおく. 次に平方因子を持たない整数 d 上の乗法的関数 $\omega(d)$ を次のように定める:

定義 5.1.3. 各 $p \in \mathcal{P}$ に対して値 $\omega(p)$ を定め, $q \notin \mathcal{P}$ に対しては $\omega(q) = 0$ であるとしてやり,

$$\omega(1) := 1, \quad \omega(d) := \prod_{p|d} \omega(p) \quad (\mu(d) \neq 0)$$

と定める. ◇

この $\omega(d)$ を用いて各 $\mathcal{A}_d$ に対しその剰余項を

$$R_d := |\mathcal{A}_d| - \frac{\omega(d)}{d}X \tag{5.1.4}$$

と定める. 以上に述べた量 X, $\omega_(p)$ の定め方は任意に与えられうるものだが, 近似という目的のために各剰余項の大きさ $|R_d|$ ができるだけ小さくなるような与え方をしたい.

この ω を用いてさらにいくつかの定義を行う.

定義 5.1.5. $z \geq 2$ を実数とした上で積

$$W(z) := \prod_{p<z}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$$

を定める. また平方因子を持たない整数 d に対し

$$g(d) := \frac{\omega(d)}{d\prod_{p|d}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)} \quad (\mu(d) \neq 0)$$

と定める. これは定まる範囲において乗法的関数となっている. ◇

この積にまつわり, 次の条件が満たされると仮定することがある:

条件 5.1.6 (Ω_1)**.** 各 p について

$$0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1} \quad ({}^\exists A_1 \geq 1)$$

が成立する. 特にこれは

$$1 \leq \frac{1}{1 - \frac{\omega(p)}{p}} \leq A_1$$

と同値である.

これは積 $W(z)$, 関数 $g(z)$ が well-defined であることを保証する. ◇

条件 5.1.7 (R)**.** $\mu(d) \neq 0, (d, \overline{\mathcal{P}}) = 1$ を満たす d について

$$|R_d| \leq \omega(d)$$

が成立する. ◇

これらの定義と記法の下で Eratosthenes のふるいを記述しよう. $(d, P(z)) = 1$ とする. このとき Mobius 関数についての次の性質:

$$\sum_{m|n}\mu(m) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z) &= \sum_{a\in\mathcal{A}_d}\sum_{(a,P(z))=1} 1 \\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}_d}\sum_{\substack{d'|a\\ d'|P(z)}} \mu(d') \\
&= \sum_{d'|P(z)} \mu(d') \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\equiv 0 \pmod{dd'}}} 1 \\
&= \sum_{d'|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_{dd'}|
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

と表すことができる. この変形を用いて次の主張が従う:

定理 5.1.9 (Eratosthenes-Legendre のふるい). [HR74, p.31 THEOREM 1.1]

$$
S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z) = \frac{\omega(d)}{d}XW(z) + \theta\sum_{d'|P(z)}|R_{dd'}|,
$$

また条件 5.1.7(R) および $\omega(p)\le A_0$ の下で,

$$
S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = XW(z) + \theta(1+A_0)^z
$$

が成り立つ. ◇

証明. いま d が平方因子を持たないことから

$$
S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z) = \sum_{d'|P(z)}\mu(d)\left(\frac{\omega(dd')}{dd'}X + R_{dd'}\right)
$$

となり, また ω の乗法性と定義から

$$
\sum_{d'|P(z)}\mu(d')\frac{\omega(d')}{d'} = \prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathcal{P}}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = \prod_{p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = W(z)
$$

となる. 以上から

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P},z) &= \frac{\omega(d)}{d}X\sum_{d'|P(z)}\mu(d')\frac{\omega(d')}{d'} + \sum_{d'|P(z)}\mu(d)R_{dd'} \\
&= \frac{\omega(d)}{d}XW(z) + \theta\sum_{d'|P(z)}|R_{dd'}|
\end{aligned}
$$

が得られる. ただし $|\theta|\le 1$ とする.

また $q=1$ とした上で仮定に注意すれば, $|R_d|\le A_0^{\nu(d)}$ となり

$$
\sum_{d|P(z)}|R_d| \le \sum_{d|P(z)}A_0^{\nu(d)} = \prod_{p|P(z)}(1+A_0) \le (1+A_0)^{\pi(z)} \le (1+A_0)^z
$$

が得られる. □

節の最後に以降用いる記号をさらに定めておく.

定義 5.1.10. 整数 K を割り切らない素数全体の集合を

$$\mathcal{P}_K (= \{p : p \nmid K\})$$

と書く. ◇

この意味で $\mathcal{P}_1$ は素数全体の集合を表す.

5.2 組合せ論的ふるい

定理 5.1.9 は残念なことに X に比べて z が非常に小さくないと使えない. 誤差項の大きさが主要項の大きさを超えてしまうからである. これは足し上げられる誤差項の数が z の増加とともに指数関数的に増加していくことによる. この問題に解決を与えたのが Brun によるアイディアである.

定義 5.2.1.

$$\sigma_0(n) := \sum_{d|n} \mu(d)$$

とし, また $\chi(d)$ を各平方因子を持たない整数 d に対して与えられる値とし,

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\chi(d), \quad \sigma(1) = \chi(1) = 1$$

と定める. ◇

繰り返しになるが, Eratosthenes のふるいは

$$\sum_{d|(a,P(z))} \mu(d)$$

を $P(z)$ と互いに素な整数列の特性関数として使うことによっていた. これは z が非常に小さくない限りは剰余項

$$\sum_{d|P(z)} |R_d|$$

があまりにも多くの項を持ちすぎることから良い結果をもたらさない. これを受けて上の定義では, 和の項数を $\chi(d)$ で制御することを目指している.

$\sigma(n)$ は $n > 1$ で充分な頻度で 0 に近づくことを要求したい. これは $\sigma((n, P(z)))$ が $P(z)$ と互いに素な整数 n を拾い上げるという意味で $\sigma_0((n, P(z)))$ に近く, また一方剰余項が扱いやすい範囲に収まるようにするためである.

命題 5.2.2. [HR74, p.39]

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) = &\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathcal{A}_d| \\ &- \sum_{d|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<P_{\min}(d)}} \mu(d)(\chi(d) - \chi(pd))S(\mathcal{A}_{pd}; \mathcal{P}, p) \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

◇

証明. Möbius の反転公式より

$$\mu(d)\chi(d) = \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma(\delta) \tag{5.2.4}$$

である．これは

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

(式 (5.1.8) から導かれる) と

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathcal{A}_d|$$

を調べるために用いる．

さて

$$\mathcal{P}^{(d)} := \{p \in \mathcal{P} : p \nmid d\}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathcal{A}_d| &= \sum_{d|P(z)} |\mathcal{A}_d| \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma(d) \\
&= \sum_{\delta|P(z)} \sigma(\delta) \sum_{t|P(z)/\delta} \mu(t)|\mathcal{A}_{\delta t}| \\
&= \sum_{t|P(z)} \mu(t)|\mathcal{A}_t| + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma(\delta) \sum_{t|(P(z)/\delta)} \mu(t)|\mathcal{A}_{\delta t}| \\
&= S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) + \sum_{1<d|P(z)} \sigma(d) S(\mathcal{A}_d;\mathcal{P}^{(d)},z)
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

である．これは基本的な比較だが第 2 項に χ が入らない．以降これを変形していく．

$d > 1$ を平方因子を持たない自然数, p を d を割り切る素数としたとき,

$$\sigma(d) = \sum_{l|d/p} \mu(l)\chi(l) + \sum_{l|d/p} \mu(pl)\chi(pl) = \sum_{l|d/p} \mu(l)(\chi(l) - \chi(pl)) \tag{5.2.6}$$

が成り立つ．

$$P_{z_1,z} = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P} \\ z_1 \le p < z}} p = \frac{P(z)}{P(z_1)}, \quad 2 \le z_1 \le z$$

として,

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A};\mathcal{P},z_1) &= \sum_{t|P_{z_1,z}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ (a,P(z_1))=1 \\ (a,P_{z_1,z})=t}} 1 = \sum_{t|P_{z_1,z}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}_t \\ (a,P(z)/t)=1}} 1 \\
&= \sum_{t|P_{z_1,z}} S(\mathcal{A}_t;\mathcal{P}^{(t)},z)
\end{aligned}$$

が従う．これと (5.2.6) において $p = P_{\min}(d)$ とした式より，

$$\begin{aligned}
&\sum_{1<(P(z)/d)} \sigma(d) S(\mathcal{A}_d; \mathcal{P}^{(d)}, z) \\
&= \sum_{\delta | P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<P_{\min}(\delta)}} S(\mathcal{A}_{p\delta}; \mathcal{P}^{(p\delta)}, z) \sum_{l|\delta} \mu(l)(\chi(l) - \chi(pl)) \\
&= \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<P_{\min}(l)}} \mu(l)(\chi(l) - \chi(pl)) \sum_{\substack{t|P(z)/l \\ p<P_{\min}(t)}} S(\mathcal{A}_{plt}; \mathcal{P}^{(plt)}, z) \\
&= \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<P_{\min}(l)}} \mu(l)(\chi(l) - \chi(pl)) S(\mathcal{A}_{pl}; \mathcal{P}^{(pl)}, p)
\end{aligned}$$

となる．これを (5.2.5) に代入して，$P_{\min}(d) > p$ であるときに $\mathcal{P}^{(pd)}$ の p での打ち切りと $\mathcal{P}$ の p での打ち切りが一致することに注意すれば

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) = &\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi(d)|\mathcal{A}_d| \\
&- \sum_{d|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<P_{\min}(d)}} \mu(d)(\chi(d) - \chi(pd)) S(\mathcal{A}_{pd}; \mathcal{P}, p)
\end{aligned}$$

を得る． □

この命題から特に，次の重要な形の式が得られる．

系 5.2.7 (Buchstab の恒等式). [HR74, p.39]

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) = |\mathcal{A}| - \sum_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} S(\mathcal{A}_p; \mathcal{P}, p),$$

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) = S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z_1) - \sum_{\substack{z_1 \le p<z \\ p\in\mathcal{P}}} S(\mathcal{A}_p; \mathcal{P}, p), \quad 2 \le z_1 \le z$$

◇

証明. 第 1 式は命題 5.2.2 において $\chi(1) = 1$, $\chi(d) = 0$ $(d > 1)$ とすれば得られる．また第 2 式は $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z_1)$ $(2 \le z_1 \le z)$ との差を取り得られる． □

註 5.2.8. これはつまり，各 $S(\mathcal{A}_p; \mathcal{P}, p)$ に対する上界が $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ に対する下界を与えうるということを示している．よって与えられたふるい問題に対する上界の評価の改善が，下界の評価の改善にもなるのである．

また，Buchstab の恒等式の右辺の和の各項 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, p)$ に再び Buchstab の恒等式を用いることができる．この「反復」は何度でも繰り返すことができるので，恒等式を「無限回」適用した極限での評価が気になる．ただしすべての項 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, p)$ に適用すると，項数が増えすぎてしまい誤差項の増大につながるから，p がある程度小さい場合のみ恒等式の反復を行うことを考える．このときに出てくる評価が「Rosser のふるい」とよばれるふるいの結果となる．Rosser のふるいは 5.4 節で定義する． ◇

この組み合わせ論的ふるい法を用いる場合，一般には $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ について等式による近似式を与えることは難しい．その代わりに χ をうまく選ぶことによって $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ の良い上から（あるいは下から）の評価を得

ることを目指す．そのために次のような関数 σ_1, σ_2 を導入する．

$$\sigma_\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\chi_\nu(d), \quad \sigma_\nu(1) = \chi_\nu(1) = 1 \quad (\nu = 1, 2), \tag{5.2.9}$$

ただし

$$\sigma_2(d) \le \sigma_0(d) \le \sigma_1(d) \quad ({}^\forall d|P(z)) \tag{5.2.10}$$

を満たすものとする．これはあるいは

$$\sigma_2(d) \le 0 \le \sigma_1(d) \quad (1 < {}^\forall d|P(z))$$

ということである．したがって (5.2.5) 式から

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)|\mathcal{A}_d| \le S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \le \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)|\mathcal{A}_d| \tag{5.2.11}$$

となる．あるいは $\nu = 1, 2$ において χ_ν が

$$(-1)^{\nu-1}\mu(d)(\chi_\nu(d) - \chi_\nu(pd)) \ge 0 \quad (\ pd|P(z),\ p < P_{\min}(d)\ ) \tag{5.2.12}$$

を満たすとすれば, (5.2.3) 式の χ を χ_ν に置き換えても導かれる．

(5.1.4) を (5.2.11) に代入すると

$$\begin{aligned} X \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)\frac{\omega(d)}{d} - \sum_{d|P(z)} |\chi_2(d)||R_d| &\le S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \\ \le X \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)\frac{\omega(d)}{d} + \sum_{d|P(z)} |\chi_1(d)||R_d| & \end{aligned}$$

を得る．この式から, 組み合わせ論的ふるい法の問題は $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ に良い評価を与え, (5.2.9), (5.2.10) をみたす χ_ν を構成することに移る．これは言い換えれば, (5.2.9), (5.2.10) を満たした上で次の 2 式

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)\frac{\omega(d)}{d}, \quad \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)\frac{\omega(d)}{d}$$

がそれぞれ最小・最大となり, かつ

$$\sum_{d|P(z)} |\chi_\nu(d)||R_d| \quad (\nu = 1, 2) \tag{5.2.13}$$

が充分に小さくなるような χ_1, χ_2 を求めようということである．

最小・最大化については, (5.2.4) を χ_ν に用いて, $P := P(z)$, また条件 5.1.6(Ω_1) のもとで

$$\begin{aligned} &\sum_{d|P} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} \\ &\qquad = \sum_{d|P} \frac{\omega(d)}{d} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma_\nu(\delta) = \sum_{\delta|P} \sigma_\nu(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta} \sum_{t|(p/\delta)} \mu(t)\frac{\omega(t)}{t} \\ &\qquad = \sum_{\delta|P} \sigma_\nu(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta} \prod_{p|(P/\delta)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = W(z)\sum_{\delta|P} \sigma_\nu(\delta)g(\delta) \\ &\qquad = W(z)\left(1 + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma_\nu(\delta)g(\delta)\right) \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

が成り立つから,

$$\left|\sum_{1<\delta|P(z)} \sigma_\nu(\delta)g(\delta)\right| \quad (\nu=1,2) \tag{5.2.15}$$

を最小化することが課題となる. ただし (5.2.13) を満たす必要があり, さらに $\nu=2$ においては

$$1+\sum_{1<\delta|P(z)} \sigma_2(\delta)g(\delta)>0 \tag{5.2.16}$$

も満たされていなければ意味のある下界を与えないことに注意する.

いずれにせよ一般の場合にこの最小・最大化を考えることは非常に難しいので, さらに適当な制限を χ_1,χ_2 に課して考察をすすめる.

まず (5.2.13) を満たすために

$$\chi_\nu(d)=0 \quad (d\notin\mathcal{D}_\nu)$$

とする. ただし $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ は $P(z)$ のある約数たちの集合であり, (5.2.13) と「(5.2.15) が小さい（さらに $\nu=2$ では (5.2.16) もみたす)」が同時に満たされるほど要素が少ないものとする.

素直に思いつきうる $\mathcal{D}_\nu$ としては, ある $y_1,y_2>1$ を与えた上での

$$\mathcal{D}_\nu=\{d:d|P(z),d<y_\nu\} \quad (\nu=1,2)$$

が挙げられる. つまり単純に d に大きさの制限をかけたものである. これを用いたふるいは発案者の名前を取り「Selberg のふるい」とよばれる. この方法もまた有意義な結果を生み出すがここでは取り扱わない.

以降取り扱うのは

$$d|P(z)\Rightarrow\chi_\nu(d)=0,1 \quad (\nu=1,2)$$

とし, おのおのが $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ の特性関数であるとみなしたものである. また χ_1,χ_2 が (5.2.12) を満たして (5.2.11) が成立することも要求する. 狭義にはこの方法が取られるものを組み合わせ論的ふるいと呼ぶ.

χ_ν が (5.2.11) を満たすとする. このとき (5.2.12) の結果部を満たすには

$$\chi_\nu(d)=\chi_\nu(pd) \tag{5.2.17}$$

$$\chi_\nu(d)=1,\ \chi_\nu(pd)=0,\ \mu(d)=(-1)^{\nu-1} \tag{5.2.18}$$

$$\chi_\nu(d)=0,\ \chi_\nu(pd)=1,\ \mu(d)=(-1)^{\nu} \tag{5.2.19}$$

のいずれかが起きなければならない. (5.2.17) が常に成り立てば χ_ν は $\chi_\nu(d)=1$ $(d|P(z))$ として定まり, Eratosthenes-Legendre のふるいに帰着される. とはいえ考察を極端に複雑にしないためにおおむねこの式が成り立っているとする. ここで $\mathcal{D}_\nu$ が $P(z)$ の約数の集合として定まっていたことに注目して, さらに

$$\chi_\nu(d)=1,\ t|d\Rightarrow\ \chi_\nu(t)=1$$

を満たすことを要求してみる. するとこのとき (5.2.19) は決して起こり得ず, また $\chi_\nu(pd)=0$ では $\chi_\nu(d)=1$ のときのみ (5.2.17) が起こらない. この場合 (5.2.18) に注意して,$\chi_\nu(d)=1$ かつ $\mu(d)=(-1)^\nu$ のとき $\chi_\nu(pd)=1$ となるように χ_ν に求める.

以上をまとめると, $\chi_\nu(d)$ がすべての整数 $d|P(z)$ について定まり,

$$\chi_\nu(d)=0 \text{ or } \chi_\nu(d)=1 \quad (d|P(z)) \tag{5.2.20}$$

$$\chi_\nu(1)=1 \tag{5.2.21}$$

$$\chi_\nu(d)=1\Rightarrow\chi_\nu(t)=1 \quad (t|d,d|P(z)) \tag{5.2.22}$$

$$\chi_\nu(t)=1,\ \mu(t)=(-1)^\nu\Rightarrow\chi_\nu(pd)=1 \quad (pt|P(z),\ p<P_{\min}(t)) \tag{5.2.23}$$

を満たすとすれば (5.2.12) が満たされ, (5.2.11) が保証される．このような χ_1, χ_2 が組合せ論的ふるいを与えることになる．この条件下で以下の有用な恒等式が成り立つ．

補題 5.2.24. [HR74, p.44]

$$\chi_\nu(t) - \chi_\nu(pt) = (-1)^{\nu-1}\mu(t)\chi_\nu(t)(1-\chi_\nu(pt)) \quad (pt|P(z),\ p < P_{\min}(t))$$

◇

証明. まず $\chi_\nu(t) = \chi_\nu(pt)$ の場合は明らかに両辺 0 で成立する．また (5.2.22) より $\chi_\nu(pt) = 1$ の場合でもやはり両辺 0 で成立する．自明でないのは $\chi_\nu(pt) = 0,\ \chi_\nu(t) = 1$ のときだが, (5.2.23) の対偶より $\mu(t) = (-1)^{\nu-1}$ となって両辺 1 となり主張が従う． □

ここで (5.2.14) 式を更に変形させる．

補題 5.2.25. [HR74, p.44] 条件 5.1.6(Ω_1) のもと, $p^+ \in \mathcal{P}$ を p の次に大きい素数としたとき

$$\begin{aligned}\sum_{d|P(z)} &\mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} \\ &= W(z)\left(1 + (-1)^{\nu-1}\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum_{t|P_{p^+,z}}\frac{\chi_\nu(t)(1-\chi_\nu(pt))}{t}\omega(t)\right)\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

が成り立つ． ◇

証明. まず次の等式を示す:

$$\sum_{p|d}(\chi_\nu((d, P_{p^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p,z}))) = 1 - \chi_\nu(d) \quad (d|P(z))$$

これは $d = 1$ においては明らかであり, $p_1 < \cdots < p_r$ $(p_i \in \mathcal{P})$, $d = p_1 \cdots p_r$ とすれば

$$\begin{aligned}\sum_{p|d}(\chi_\nu((d, P_{p^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p,z}))) &= \sum_{i=1}^{r}(\chi_\nu((d, P_{p_i^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p_i,z}))) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}(\chi_\nu(p_{i+1}\cdots p_r) - \chi_\nu(p_i\cdots p_r)) + 1 - \chi_\nu(p_r) \\ &= 1 - \chi_\nu(d)\end{aligned}$$

となって導かれる．これを $\chi_\nu(d)$ について解き (5.2.26) 左辺に代入して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d}\\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\left(1-\sum_{p|d}(\chi_\nu((d,P_{p^+,z}))-\chi_\nu((d,P_{p,z})))\right)\frac{\omega(d)}{d}\\
&= \sum_{d|P(z)} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}-\sum_{d|P(z)} \mu(d)\left(\sum_{p|d}(\chi_\nu((d,P_{p^+,z}))-\chi_\nu((d,P_{p,z})))\right)\frac{\omega(d)}{d}\\
&= \prod_{p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)+\sum_{d|P(z)}\sum_{p|d}\mu\left(\frac{d}{p}\right)\left((\chi_\nu((d,P_{p^+,z}))-\chi_\nu((d,P_{p,z})))\right)\frac{\omega(d)}{d}\\
&= W(z)+\sum_{d|P(z)}\sum_{p|d}\mu(\delta t)(\chi_\nu(t)-\chi_\nu(pt))\frac{\omega(\delta pt)}{\delta pt}\\
&= W(z)+\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\sum_{\delta|P(p)}\mu(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta}\sum_{t|P_{p^+,z}}\mu(t)\frac{\chi_\nu(t)-\chi_\nu(pt)}{t}\omega(t)\\
&= W(z)+(-1)^{\nu-1}\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}W(p)\sum_{t|P_{p^+,z}}\mu(t)\frac{\chi_\nu(t)-\chi_\nu(pt)}{t}\omega(t)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし四つ目の等号では

$$d=\delta pt \quad (\delta|P(p),\ t|P_{p^+,z})$$

という分解を用い，また最後の等号では

$$
\begin{aligned}
\mu(t)(\chi_\nu(t)-\chi_{\nu(pt)}) &= \mu(t)(-1)^{\nu-1}\mu(t)\chi_\nu(t)(1-\chi_\nu(pt))\\
&= (-1)^{\nu-1}\chi_\nu(t)(1-\chi_\nu(pt))
\end{aligned}
$$

という変形を用いた．条件 5.1.6(Ω_1) より $W(z)\neq 0$ だから (5.2.26) が従う． $\square$

今回は主には用いないが，Brun が最初に考案した χ を挙げる．正の整数 r および $d|P(z)$ たる平方因子を持たない整数 d に対して

$$\chi^{(r)}(d)=\begin{cases}1 & \nu(d)\le r-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定めれば，これは

$$\mathcal{D}^{(r)}:=\{d: d|P(z),\ \nu(d)\le r-1\}$$

という集合の特性関数になる．このとき $p<P_{\min}(d)$ とすれば

$$\mu(d)(\chi^{(r)}(d)-\chi^{(r)}(pd))=\begin{cases}0 & \nu(d)\neq r-1\\ (-1)^{r-1} & \nu(d)=r-1\end{cases} \tag{5.2.27}$$

となり，従って (5.2.3) の χ を $\chi^{(r)}$ に置き換えれば

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\le r-1}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|-(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\delta|P(z)\\ \nu(\delta)=r}}S(\mathcal{A}_\delta;\mathcal{P},q(\delta)) \tag{5.2.28}$$

となる．

いま $r=2s+1,\ 2s+2\ (s\geq 0)$ とつらなる自然数を選んで $\chi_1=\chi^{(2s+1)},\ \chi_2=\chi^{(2s+2)}$ とすれば, これは組み合わせ論的ふるいを構成する. 特に (5.2.27) より (5.2.12) をみたし, (5.2.11) が従うから

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq 2s+1}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|\leq S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)\leq \sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq 2s}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

を得る.

あるいは等式の形を求める場合, (5.2.28) と自明な評価式

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)\leq|\mathcal{A}|\leq X+|R_1|$$

から

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq r-1}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|+\theta\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)=r}}|\mathcal{A}_d|,\quad |\theta|\leq 1$$

が導かれる.

これ以上は詳しく見ないが, この Brun のアイデアをそのまま発展させると次の主張が得られる:

条件 5.2.29 $(\Omega_2(\kappa))$**.** ある定数 $\kappa>0,\ A_2\geq 1$ について

$$\sum_{w\leq p<z}\frac{\omega(p)\log p}{p}\leq\kappa\log\frac{z}{w}+A_2\quad(2\leq w\leq z)$$

が成り立っている.

この条件は関数 $\omega(p)$ の平均値が κ 以下であることを表現する. この条件が成り立つ場合のふるい問題は「κ 次元のふるい問題」であると言う. ◇

事実 5.2.30 (Fundamental lemma). [HR74, p82. THEOREM 2.5] 条件 5.1.6(Ω_1), 5.2.29$(\Omega_2(\kappa))$, 5.1.7(R) を課す. $X\geq z$ とし, $u=\log X/\log z$ としたとき,

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)=XW(z)(1+O(\exp(-u(\log u-\log\log 3u-\log\kappa-2)))+O(\exp(-\sqrt{\log X})))$$

が成り立つ. ◇

5.3 技術的主張

ここからは積 $W(z)$ の基本的な性質を導くための技術的な議論を行う. 今節では条件 5.2.29(Ω_2) を仮定する:

補題 5.3.1. [HR74, pp.52–53, LEMMA 2.3]

$$\sum_{w\leq p<z}\frac{\omega(p)}{p}\leq\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+\frac{A_2}{\log w}\quad(2\leq w\leq z)$$

である．さらに条件 5.1.6(Ω_1) も課したとき

$$\sum_{w \le p < z} g(p) \le \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + O\left(\frac{1}{\log w}\right) \tag{5.3.2}$$

$$\frac{W(w)}{W(z)} \le \left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log w}\right)\right) = O\left(\frac{\log^{\kappa} z}{\log^{\kappa} w}\right) \tag{5.3.3}$$

$$\frac{1}{W(z)} = O(\log^{\kappa} z) \tag{5.3.4}$$

が成り立つ． $\diamond$

証明． まず条件 5.2.29($\Omega_2(\kappa)$) に部分和法を施す．

$$A(x) := \sum_{w \le p < x} \frac{\omega(p) \log p}{p},\ \phi(x) = \frac{1}{\log x}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} &= A(z)\phi(z) - \int_w^z A(t)\phi'(t)dt \\
&\le \frac{\kappa \log(z/w) + A_2}{\log z} + \int_w^z \frac{\kappa \log(t/w) + A_2}{t \log^2 t} dt
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
\int_w^z \frac{\kappa \log(t/w) + A_2}{t \log^2 t} dt &= \int_w^z \frac{\kappa}{t \log t} dt + \int_w^z \frac{-\kappa \log w + A_2}{t \log^2 t} dt \\
&= \kappa [\log \log t]_w^z - (A_2 - \kappa \log w) \left[\frac{1}{\log t}\right]_w^z \\
&= \kappa \log \log z - \kappa \log \log w - \frac{A_2}{\log z} + \frac{A_2}{\log w} + \frac{\kappa \log w}{\log z} - \kappa
\end{aligned}$$

だから

$$\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \le \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}$$

を得る．

　この結果から次に (5.3.2) 式を示す．

$$A(x) := \sum_{w \le p < x} \frac{\omega(p)}{p},\ \phi(x) = \frac{1}{\log x}$$

として, 再び部分和法から

$$
\begin{aligned}
\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} &= A(z)\phi(z) - \int_w^z A(t)\phi'(t)dt \\
&\le \frac{1}{\log z}\left(\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}\right) + \int_w^z \frac{1}{t\log^2 t}\left(\kappa \log \frac{\log t}{\log w} + \frac{A_2}{\log w} dt\right) \\
&= \frac{1}{\log z}\left(\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}\right) - \frac{A_2}{\log z \log w} + \frac{A_2}{\log^2 w} + \int_w^z \frac{1}{t\log^2 t}\kappa \log \frac{\log t}{\log w} dt \\
&= \frac{A_2}{\log^2 w} + \frac{\kappa}{\log z}(\log\log z - \log\log w) + \int_w^z \frac{\kappa \log\log t}{t\log^2 t}dt - \int_w^z \frac{\kappa \log\log w}{t \log^2 t}dt \\
&= \frac{A_2}{\log^2 w} + \kappa\left(\frac{\log\log z}{\log z} - \frac{\log\log w}{\log w}\right) + \int_w^z \frac{\kappa \log\log t}{t\log^2 t}dt \\
&= \frac{A_2}{\log^2 w} + \kappa \int_w^z \frac{dt}{t\log^2 t} \\
&= \frac{A_2}{\log^2 w} + \kappa\left(\frac{1}{\log w} - \frac{1}{\log z}\right) \\
&\le \frac{1}{\log w}\left(\kappa + \frac{A_2}{\log w}\right)
\end{aligned}
$$

が従う. ここで条件 5.2.29($\Omega_2(\kappa)$) において $w = p,\ z = p + \epsilon\ (\epsilon > 0)$ とすれば

$$
\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)\log p}{p} = \frac{\omega(p)\log p}{p} \le \kappa \log \frac{p+\epsilon}{p} + A_2 \to A_2\ (\epsilon \to 0)
$$

であるから, 条件 5.1.6(Ω_1) と併せて

$$
\sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} g(p) \le A_1 \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p}\frac{\omega(p)}{p} \le A_1 A_2 \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} \le \frac{A_1 A_2}{\log w}\left(\kappa + \frac{A_2}{\log w}\right) \tag{5.3.5}
$$

となる.

いま定義から

$$
1 + g(p) = 1 + \frac{\omega(p)}{p(1 - \omega(p)/p)} = 1 + \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)} = \frac{1}{1 - (\omega(p)/p)}
$$

であり, また

$$
g(p) = \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)}
$$

より

$$
g(p) = \frac{\omega(p)}{p} + \frac{\omega(p)}{p} g(p)
$$

なので (5.3.5) から

$$
\begin{aligned}
\sum_{w \le p < z} g(p) &= \sum_{w \le p < z}\left(\frac{\omega(p)}{p} + \frac{\omega(p)}{p} g(p)\right) \\
&\le \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w} + \frac{A_1 A_2}{\log w}\left(\kappa + \frac{A_2}{\log w}\right) \\
&= \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + O\left(\frac{1}{\log w}\right)
\end{aligned}
$$

となって (5.3.2) を得る.

またここから

$$
\begin{aligned}
\frac{W(w)}{W(z)} &= \prod_{w \le p < z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \\
&= \prod_{w \le p < z} (1 + g(p)) \le \exp\left(\sum_{w \le p < z} g(p)\right) \\
&\le \exp\left(\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}\left(1 + A_1\kappa + \frac{A_1 A_2}{\log 2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa} O\left(\exp\left(\frac{1}{\log w}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\log z}{\log w}\right)^{\kappa} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log w}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となって (5.3.3) が示される. さらに $w = 2$ として (5.3.4) を導く. □

補題 5.3.6. [HR74, p.54, LEMMA 2.4] $A := \max(\kappa, A_2)$ として,

$$
\sum_{p<z} \omega(p) \le (\kappa + A_2)\mathrm{Li}z + \frac{2A_2}{\log 2} \le A(2\mathrm{Li}z + 3)
$$

が成り立つ. ◇

証明.

$$
\begin{aligned}
\sum_{p<z} \omega(p) &= \sum_{2 \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} p = z \sum_{2 \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} - \int_2^z \sum_{2 \le p < w} \frac{\omega(p)}{p} dw \\
&= (2 + (z-2)) \sum_{2 \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} - \int_2^z \sum_{2 \le p < w} \frac{\omega(p)}{p} dw \\
&= 2 \sum_{2 \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} + \int_2^z \left(\sum_{2 \le p < z} - \sum_{2 \le p < w}\right) \frac{\omega(p)}{p} dw \\
&= 2 \sum_{2 \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} + \int_2^z \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} dw \\
&\le 2\kappa \log\left(\frac{\log z}{\log 2}\right) + \frac{2A_2}{\log 2} + \int_2^z \left(\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}\right) dw \\
&= \frac{2A_2}{\log 2} + (\kappa + A_2)\mathrm{Li}z
\end{aligned}
$$

より従う. ただし最後の変形は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}z = \int_2^z \frac{dw}{\log w} &= \int_2^z \frac{w dw}{w \log w} \\
&= [w \log\log w]_2^z - \int_2^z \log\log w dw \\
&= ((z-2) + 2) \log\log z - 2\log\log 2 - \int_2^z \log\log w dw \\
&= 2 \log \frac{\log z}{\log 2} + \int_2^z \log \frac{\log z}{\log w} dw
\end{aligned}
$$

から従う. $\square$

この結果から次のようなことも言える: 定理 5.1.9 において $q=1$ とした上で条件 5.1.7(R) を仮定すれば

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) &= XW(z)+\theta' \sum_{d|P(z)} |R_d| \\ &= XW(z)+\theta'' \sum_{d|P(z)} \omega(d) \\ &= XW(z)+\theta''' \prod_{p<z} (1+\omega(p)) \\ &= XW(z)+\theta \exp\left(\sum_{p<z} \omega(p)\right) \quad (|\theta|\le 1) \end{aligned}$$

となり, 上の補題から

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = XW(z)+\theta e^{A(2\mathrm{li}z+3)} \quad (A=\max(\kappa, A_2),\ |\theta|\le 1)$$

が得られる.

5.4 Rosser のふるい

今回主に用いる組み合わせ論的ふるいは Rosser の発案したものである. Rosser のふるいは, 特に Buchstab の恒等式を反復して得られる結果の記述と相性が良い (註 5.2.8). 実際に 6 章では「半次元の」Rosser のふるいを用いる.

Rosser のふるいを構成する特性関数 χ_1, χ_2 は以下のように定める:

まず充分大きい自然数 r について $d|P(z)$ として $\nu=1,\ 2$ で

$$\chi_\nu(1)=1,\ \chi_\nu(d)=0 \quad (\nu(d)>2r+1-\nu) \tag{5.4.1}$$

を満たすとする. $P(z)$ の約数 d を

$$d=p_i p_{i-1}\cdots p_1 \quad (p_i<\cdots<p_1<z) \tag{5.4.2}$$

と書き下せば (5.4.1) から分かるように, Rosser のふるいでは

$$i=\nu(d)\le 2r+1-\nu$$

となる d についてのみ考える.

次に

$$\nu(d)\le 1+\frac{1-(-1)^\nu}{2} \ \Rightarrow\ \chi_\nu(d)=1$$

であるとする. このとき「$P(z)$ の約数 d 全体のなす集合」の部分集合にあたる $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ が, それぞれ χ_1, χ_2 を特性関数として持つような集合だとすれば, $\mathcal{D}_1$ は $1,\ p,\ pp'$ $(p,p'|P(z), p\ne p')$ を含み, $\mathcal{D}_2$ は $1,\ p$ $(p|P(z))$ を含む.

そして d を (5.4.2) のようにとり

$$1+\frac{1-(-1)^\nu}{2}<i\le 2r+1-\nu$$

だとしたとき, $\beta = \beta_\kappa (> 1)$ を固定し

$$\chi_\nu(d) = 1 \;\Leftrightarrow\; p_{2j+\nu}^{\beta} p_{2j+\nu-1} \cdots p_1 < X \;\left(j = 0, \cdots, \left[\left[\frac{i-\nu}{2}\right]\right] \right) \tag{5.4.3}$$

とする. (5.4.3) では特に最小の素数 $p_{2j+\nu}$ が小さくなるように制限を掛けている. これが註 5.2.8 で言及した「反復の制限」に対応している (具体的な記述は 6.2 節に回す).

以上で特性関数 $\chi_\nu(d)$ が定まった. 実際にこの定義が組み合わせ論的ふるいを構成することを見よう. まず $\nu = 1$ として, $d = 1,\ p,\ pp'$ では $\chi_1(d) = 1$ であり, $i \geq 3$ であれば d を (5.4.2) の通りとして

$$\chi_1(d) = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} p_1^{\beta} < X \\ p_3^{\beta} p_2 p_1 < X \\ \vdots \\ p_{2j_0+1}^{\beta} p_{2j_0} \cdots p_1 < X \;\; \left(j_0 = \left[\frac{i-1}{2}\right]\right) \end{cases} \tag{5.4.4}$$

である. 次に $\nu = 2$ では $d = 1,\ p$ で $\chi_2(d) = 1$ であり, $i \geq 2$ では

$$\chi_2(d) = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} p_2^{\beta} p_1 < X \\ p_4^{\beta} p_3 p_2 p_1 < X \\ \vdots \\ p_{2j_1+2}^{\beta} p_{2j_1+1} \cdots p_1 < X \;\; \left(j_1 = \left[\frac{i}{2}\right] - 1\right) \end{cases} \tag{5.4.5}$$

である.

ここで χ_1, χ_2 が式 (5.2.20)-(5.2.23) を満たすことを見よう. (5.2.20), (5.2.21) は明らかに満たされている. (5.2.22), つまり $\chi_\nu(d)$ が約数閉であることも (5.4.4), (5.4.5) から直ちに従う. あとは (5.2.23) 式を確認すれば良い. $\chi_1(d) = 1$ かつ $\mu(d) = -1$ とすれば i は奇数なので $i \leq 2r - 1$ である. $p < p_i$ である $p \in \mathcal{P}$ を取り $\chi_1(pd)$ を考えれば, 明らかに $\nu(pd) = i + 1$ は偶数かつ $\nu(pd) \leq 2r$ が満たされる. いま $i = 2l - 1,\ p = p_{2l}$ と書けば $\chi_1(pd) = 1$ たる条件は丁度 (5.4.4) において $j_0 = l - 1$ としたときで, いま $\chi_1(d) = 1$ となっていることから $\chi_1(pd) = 1$ が従う. $\nu = 2$ でも同様な議論から示される.

6 半次元のふるい

この章ではふるい法から Iwaniec の補題が導かれることを概観する. 6.1 節では簡単に Iwaniec の論文 [Iwa76] の概要を紹介する. 6.2 節では Rosser のふるいと Buchstab の等式の関係を説明し, 半次元のふるいの一般的主張を得る過程を概観する.

6.1 補題の背景

今回用いるふるい法の主張は「半次元のふるい」, すなわち条件 $(\Omega_2(1/2))$ が成り立っているものである. [Iwa76] では関数 $\omega(d)$ について更に強い次の条件を課している.

条件 6.1.1. $\omega(d)$ を次を満たす乗法的関数とする:

「ある定数 $K, L > 1$ が取れて, 任意の実数 $z > w > 1$ について

$$-L + \frac{1}{2}\log\frac{z}{w} \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p}\log p \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)}\log p \leq K + \frac{1}{2}\log\frac{z}{w}$$

が成り立つ.」 ◇

また次の定数を用意する:

定義 6.1.2. 定数 c_0 を

$$c_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2-\log 2)e}$$

と定める. 近似値としては

$$c_0 = 0.21849971496...$$

となっている. ◇

半次元のふるいの一般論として成立するのが次の定理である.

定理 6.1.3. [Iwa76, p.71, THEOREM 1.] 関数 $F(s), f(s)$ は定義 1.1.9 で定めたものとする. $z \geq 2,\ s \geq 1$ において

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) \geq W(z)X\left(f(s) + O(e^{2K-s}\log^{-c_0} z)\right) - \sum_{\substack{d<z^s \\ d|P(z)}} |R_d|$$

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) \leq W(z)X\left(F(s) + O(e^{2K-s}\log^{-c_0} z)\right) + \sum_{\substack{d<z^s \\ d|P(z)}} |R_d|$$

が成り立つ. ◇

これと事実 5.2.30 から次が従う.

系 6.1.4. [Iwa76, p.73, COROLLARY 1.]

$$(Pl, 2k) = 1, \quad l \equiv 1 \pmod{(4,k)}, \quad \epsilon > \frac{\log\log N}{\log N}$$

$$0 < |c| < kN + M < N^{1+\epsilon}, \quad p|P \Rightarrow p < N^{\epsilon/\log\log N}$$

を仮定する. このとき

$$\sum_{\substack{M\leq n<M+N \\ n\equiv l \pmod k \\ (n+c,P)=1}} b(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p\equiv -1 \pmod 4}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}\prod_{p|P}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$\prod_{\substack{p|P \\ p\nmid c \\ p\equiv -1 \pmod 4}}\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{(4,k)}{(2,k)k}\prod_{\substack{p|(c,P)k \\ p\equiv -1 \pmod 4}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{N}{\sqrt{\log N}}(1+O(\epsilon^{\gamma}))$$

が成り立つ. ◇

本論文で用いる補題 2.3.1 は $P=1, N=x, M=1, c=1$ として従う.

註 6.1.5. 一見この系から直ちに短区間についての主張が従いそうに見えるが, 短区間をこの系に適用しようとすると条件のうち

$$0 < |c| < kN + M < N^{1+\epsilon}$$

から ϵ を非常に大きく取らなければならない. これによって誤差項が大きくなり意味のある主張とはならなくなる. ◇

6.2 Rosser のふるいと Buchstab の恒等式

まず註 5.2.8 および 5.4 節で言及した「Buchstab の恒等式の反復」を具体的に記述する．Buchstab の恒等式とは系 5.2.7 の通り

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = |\mathcal{A}| - \sum_{p|P(z)} S(\mathcal{A}_p;\mathcal{P},p) \tag{6.2.1}$$

であった．これを用いて次の主張が示される．

補題 6.2.2. [Iwa76, p.74 LEMMA 1.] $R \geq 1$ とする．各 $l \leq R+1$ について $p_l \in \mathcal{P}$ であるとし，量 $f_l = f_l(p_1,\ldots,p_l)$ を与える．このとき

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = |\mathcal{A}| + \sum_{r=1}^{R}(-1)^r \sum_{\substack{p_r<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l\ (l\leq r)}} |\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r}| + \sum_{r=1}^{R}(-1)^r \sum_{\substack{f_r\leq p_r<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l\ (l<r)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r};\mathcal{P},p_r) \\ -(-1)^R \sum_{\substack{p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l\ (l\leq R)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1}) \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

が成り立つ． ◇

証明. まず $R=1$ において，$p_l \in \mathcal{P}$ の仮定から $p_l|P(z) \Leftrightarrow p_l < z$ に注意して

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) &= |\mathcal{A}| - \sum_{p_1<z} S(\mathcal{A}_{p_1};\mathcal{P},p_1) \\ &= |\mathcal{A}| - \sum_{\substack{p_1<z \\ p_1<f_1}} S(\mathcal{A}_{p_1};\mathcal{P},p_1) - \sum_{f_1\leq p_1<z} S(\mathcal{A}_{p_1}:\mathcal{P},p_1) \\ &= |\mathcal{A}| - \sum_{\substack{p_1<z \\ p_1<f_1}} \left(|\mathcal{A}_{p_1}| - \sum_{p_2<p_1} S(\mathcal{A}_{p_1p_2};\mathcal{P},p_2) \right) - \sum_{f_1\leq p_1<z} S(\mathcal{A}_{p_1};\mathcal{P},p_1) \\ &= |\mathcal{A}| - \sum_{\substack{p_1<z \\ p_1<f_1}} |\mathcal{A}_{p_1}| - \sum_{f_1\leq p_1<z} S(\mathcal{A}_{p_1};\mathcal{P},p_1) + \sum_{\substack{p_2<p_1<z \\ p_1<f_1}} S(\mathcal{A}_{p_1p_2};\mathcal{P},p_2) \end{aligned}$$

より主張が従う．（註 5.2.8 の通り，ある程度小さい素数 p に的を絞って Buchstab の恒等式を適用しようということである.）

次にある $R \geq 1$ での主張の成立から $R+1$ での成立を導く. (6.2.3) 式の右辺最終項に注目して

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^R \sum_{\substack{p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1}) \\
&= -(-1)^R \left(\sum_{\substack{p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R+1)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1}) + \sum_{\substack{f_{R+1}\leq p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1}) \right) \\
&= -(-1)^R \sum_{\substack{p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R+1)}} \left(|\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}}| - \sum_{p_{R+2}<p_{R+1}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}p_{R+2}};\mathcal{P},p_{R+2}) \right) \\
&\qquad + (-1)^{R+1} \sum_{\substack{f_{R+1}\leq p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l<R+1)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1}) \\
&= (-1)^{R+1} \sum_{\substack{p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R+1)}} |\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}}| - (-1)^{R+1} \sum_{\substack{p_{R+2}<p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l\leq R+1)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}p_{R+2}};\mathcal{P},p_{R+2}) \\
&\qquad + (-1)^{R+1} \sum_{\substack{f_{R+1}\leq p_{R+1}<\cdots<p_1<z \\ p_l<f_l (l<R+1)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{R+1}};\mathcal{P},p_{R+1})
\end{aligned}
$$

となって, 順に (6.2.3) 式右辺の第 2 項, 第 4 項, 第 3 項にそれぞれ振り分けると $R+1$ での主張の成立が導かれる. □

証明からもわかるように, これは Buchstab の恒等式を R 回繰り返した一般形の式である. ここで量 f_l を具体的に与えて, 実際に半次元のふるいに用いられる形を与える.

定義 6.2.4. $R \geq 1$ とし, $y > 1$ とする. 各 $l \leq R+1$ について $p_l \in \mathcal{P}$ であるとし,

$$
g_l = \frac{y}{p_1 \ldots p_l} \quad (l \leq 2R)
$$

として,

$$
\begin{aligned}
S^-(\mathcal{A};\mathcal{P},z) &= |\mathcal{A}| + \sum_{r=1}^{2R+1} (-1)^r \sum_{\substack{p_r<\cdots<p_1<z \\ p_{2l}<g_{2l}\ (2l\leq r)}} |\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r}| \\
S^+(\mathcal{A};\mathcal{P},z) &= |\mathcal{A}| + \sum_{r=1}^{2R} (-1)^r \sum_{\substack{p_r<\cdots<p_1<z \\ p_{2l-1}<g_{2l-1}\ (2l-1\leq r)}} |\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r}|
\end{aligned}
$$

と定める. ◇

補題 6.2.5. [Iwa76, p.74 LEMMA 2.] $R \geq 1$ において

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{A};\mathcal{P},z) = S^-(\mathcal{A};\mathcal{P},z) &+ \sum_{r=1}^{R} \sum_{\substack{g_{2r}\leq p_{2r}<\cdots<p_1<z \\ p_{2l}<g_{2l}\ (l<r)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2r}};\mathcal{P},p_{2r}) \\
&+ \sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<z \\ p_{2l}<g_{2l}\ (l\leq R)}} S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2R+2}};\mathcal{P},p_{2R+2})
\end{aligned}
\tag{6.2.6}
$$

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)=S^{+}(\mathcal{A};\mathcal{P},z)-\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{g_{2r-1}\le p_{2r-1}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l-1}<g_{2l-1}\ (l<r)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2r-1}};\mathcal{P},p_{2r-1})$$
$$-\sum_{\substack{p_{2R+1}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l-1}<g_{2l-1}\ (l\le R)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2R+1}};\mathcal{P},p_{2R+1}) \tag{6.2.7}$$

が成り立つ. ◇

註 6.2.8. 補題 6.2.5 は半次元のふるいにおける Buchstab の恒等式の反復の結果, 特に $S^{\pm}(\mathcal{A};\mathcal{P},z)$ の評価が重要であることを示唆している. ◇

証明. まず (6.2.6) 式を示す. (6.2.3) 式において R を $2R+1$ に置き換えて, $f_1=z,\ f_{2l+1}=f_{2l}=g_{2l}\ (l\ge 1)$ とすると, 第 1 項 $|\mathcal{A}|$ は変わらず第 2 項は

$$\sum_{r=1}^{2R+1}(-1)^r\sum_{\substack{p_r<\cdots<p_1<z\\ (p_{2l+1}<)p_{2l}<g_{2l}\ (l\le r)}}|\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r}|$$

となって, 第 1 項と第 2 項を足し合わせて直ちに $S^{-}(\mathcal{A};\mathcal{P},z)$ に等しくなる. 第 3 項は r の偶奇によって議論を分ける.

(1) r が奇数のとき. $r=2r'+1\ (r'\ge 1)$ では

$$f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow f_{2r'+1}\le p_{2r'+1}<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow g_{2r'}\le p_{2r'+1}<\cdots<p_1<z$$
$$p_l<f_l\ (l<r)\Leftrightarrow (p_{l+1}<)p_l<g_l\ (l<2r'+1)\Rightarrow p_{2r'+1}<p_{2r'}<g_{2r'}$$

(ただし最後は $l=2r'$ を取った.) と和を取る際の 2 つの条件が両立せず和は 0 になる. また $r=1$ では $f_1=z<z$ が成立しないのでやはり和は 0 になる.

(2) r が偶数のとき. $r=2r'\ (r'\ge 1)$ では

$$f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow f_{2r'}\le p_{2r'}<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow g_{2r'}\le p_{2r'}<\cdots<p_1<z$$
$$p_l<f_l\ (l<r)\Leftrightarrow (p_{l+1}<)p_l<g_l\ (l<2r')\Leftrightarrow p_{2l}<g_{2l}\ (l<r')$$

となる.

以上から, r' を r と取り直して第 3 項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2R+1}(-1)^r\sum_{\substack{f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\\ p_l<f_l\ (l<r)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_r};\mathcal{P},p_r)\\
&=\sum_{\substack{1\le l\le R\\ (r=2l)}}(-1)^{2l}\sum_{\substack{g_{2l}\le p_{2l}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l'}<g_{2l'}\ (l'<l)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2l}};\mathcal{P},p_{2l})\\
&=\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{g_{2r}\le p_{2r}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l<r)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2r}};\mathcal{P},p_{2r})
\end{aligned}$$

と変形される.

第 4 項は

$$-(-1)^{2R+1}\sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<z\\ p_l<f_l\ (l\le 2R+1)}} S(\mathcal{A}_{p_1\dots p_{2R+2}};\mathcal{P},p_{2R+2})=\sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<z\\ (p_{2l+1}<)p_{2l}<g_{2l}\ (l\le R)}} S(\mathcal{A}_{p_1\dots p_{2R+2}};\mathcal{P},p_{2R+2})$$

と変形されて, 以上を組み合わせて (6.2.6) 式を得る.

次に (6.2.7) 式を示す. (6.2.3) において R を $2R$ に置き換えて, $f_{2l-1}=f_{2l}=g_{2l-1}$ $(l\ge 1)$ とすると, $p_{2l-1}<f_{2l-1}$, と $p_{2l}<f_{2l}$ が $p_{2l}<p_{2l-1}<g_{2l-1}$ に置き換わることに注意して (6.2.3) 式の第 1 項, 第 2 項, 第 4 項については (6.2.6) 式のときと同様にして求める変形が得られる. 第 3 項については再び r を偶奇で分けて議論する.

(1) r が奇数のとき. $r=2r'-1$ $(r'\ge 1)$ では

$$f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow f_{2r'-1}\le p_{2r'-1}<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow g_{2r'-1}\le p_{2r'+1}<\cdots<p_1<z$$
$$p_l<f_l\ (l<r)\Leftrightarrow (p_{l+1}<)p_l<g_l\ (l<2r'-1)\Leftrightarrow (p_{2l}<)p_{2l-1}<g_{2l-1}\ (l<r')$$

となる.

(2) r が偶数のとき. $r=2r'$ $(r'\ge 1)$ では

$$f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow f_{2r'}\le p_{2r'}<\cdots<p_1<z\Leftrightarrow g_{2r'-1}\le p_{2r'}<\cdots<p_1<z$$
$$p_l<f_l\ (l<r)\Leftrightarrow (p_{l+1}<)p_l<f_l\ (l<2r')\Rightarrow (p_{2r'}<)p_{2r'-1}<g_{2r'-1}$$

(ただし最後は $l=2r'-1$ を取った.) と和を取る際の 2 つの条件が両立せず和は 0 になる.

以上から, r' を r と取り直して第 3 項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2R}(-1)^r\sum_{\substack{f_r\le p_r<\cdots<p_1<z\\ p_l<f_l\ (l<r)}} S(\mathcal{A}_{p_1\dots p_r};\mathcal{P},p_r)\\
&=\sum_{\substack{1\le l\le R\\ (l=2r-1)}}(-1)^{2l-1}\sum_{\substack{g_{2l-1}\le p_{2l-1}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l'-1}<g_{2l'-1}\ (l'<l)}} S(\mathcal{A}_{p_1\dots p_{2l-1}};\mathcal{P},p_{2l-1})\\
&=-\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{g_{2r-1}\le p_{2r-1}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l<r)}} S(\mathcal{A}_{p_1\dots p_{2r-1}};\mathcal{P},p_{2r-1})
\end{aligned}$$

と変形されて, (6.2.7) 式が導かれた.

□

註 6.2.9. 補題 6.2.5 から特に

$$S^-(\mathcal{A};\mathcal{P},z)\le S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)\le S^+(\mathcal{A};\mathcal{P},z)$$

が得られる. ◇

ここで Buchstab の恒等式と Rosser のふるいの整合性を明示する.

定義 6.2.10. $y>1$ として $g_l=y/p_1\dots p_l$ とおく. 集合

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_y^- &:= \{d=p_1\dots p_r;\ p_r<\cdots<p_1,\ p_{2l}^2p_{2l-1}\dots p_1<y\ (2l\le r\le 2R+1)\}\\
&=\{d=p_1\dots p_r;\ p_r<\cdots<p_1,\ p_{2l}<g_{2l}\ (2l\le r\le 2R+1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_y^+ &:= \{d = p_1 \ldots p_r;\ p_r < \cdots < p_1,\ p_{2l-1}^2 p_{2l-2} \ldots p_1 < y\ (2l-1 \le r \le 2R)\}\\ &= \{d = p_1 \ldots p_r;\ p_r < \cdots < p_1,\ p_{2l-1} < g_{2l-1}\ (2l-1 \le r \le 2R)\}\end{aligned}$$

を定める. ◇

これらの $\mathcal{D}_y^{\pm}$ は, 5.4 節で定めた特性関数 χ_1, χ_2 のそれぞれの台として定まっている. ただし $\beta = \beta_{1/2} = 2$ としており, また大きさの制限のため X の代わりに y を用いている.

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| &= |\mathcal{A}| + \sum_{\nu(d)=1}^{2R+1} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}} (-1)^{\nu(d)}|\mathcal{A}_d|\\ &= |\mathcal{A}| + \sum_{\nu(d)=1}^{2R+1} (-1)^{\nu(d)} \sum_{\substack{p_{\nu(d)} < \cdots < p_1 < z\\ p_i \in \mathcal{P}\\ p_{2l} < g_{2l}\ (2l \le \nu(d))}} |\mathcal{A}_{p_1 \ldots p_{\nu(d)}}|\\ &= |\mathcal{A}| + \sum_{r=1}^{2R+1} (-1)^r \sum_{\substack{p_r < \cdots < p_1 < z\\ p_{2l} < g_{2l}\ (2l \le r)}} |\mathcal{A}_{p_1 \ldots p_r}| = S^-(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)\ ,\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^+\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| &= |\mathcal{A}| + \sum_{\nu(d)=1}^{2R} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^+\\ d|P(z)}} (-1)^{\nu(d)}|\mathcal{A}_d|\\ &= |\mathcal{A}| + \sum_{\nu(d)=1}^{2R} (-1)^{\nu(d)} \sum_{\substack{p_{\nu(d)} < \cdots < p_1 < z\\ p_i \in \mathcal{P}\\ p_{2l-1} < g_{2l-1}\ (2l-1 \le \nu(d))}} |\mathcal{A}_{p_1 \ldots p_{\nu(d)}}|\\ &= |\mathcal{A}| + \sum_{r=1}^{2R} (-1)^r \sum_{\substack{p_r < \cdots < p_1 < z\\ p_{2l-1} < g_{2l-1}\ (2l-1 \le r)}} |\mathcal{A}_{p_1 \ldots p_r}| = S^+(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)\end{aligned}$$

という変形が成り立つので,

$$S^{\pm}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^{\pm}\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| = X \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^{\pm}\\ d|P(z)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^{\pm}\\ d|P(z)}} \mu(d) R_d \tag{6.2.11}$$

が従う. 式 (6.2.11) の 1 番目の等号と註 6.2.8 から, Buchstab の恒等式と Rosser のふるいの関係が示されている.

さて再び式 (6.2.11) から

$$\begin{aligned}&X \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}} \mu(d) R_d\\ &\qquad \le S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \le X \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^+\\ d|P(z)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}_y^+\\ d|P(z)}} \mu(d) R_d\end{aligned}$$

が従う.

いま剰余項が無視できるとすれば,

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^{\pm}\\ d|P(z)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}$$

という和が評価されることで $S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)$ が評価されることになる.

この和を評価するために次の関数を定める:

定義 6.2.12. $y>1,\ s\geq 1,\ r\geq 1$ において $p_i\in\mathcal{P}\ (1\leq i\leq 2r)$ として

$$d_{2r,y}(s)=\sum_{\substack{g_{2r}\leq p_{2r}<\cdots<p_1<y^{1/s}\\ p_{2l}<g_{2l}\ \ (l<r)}} \frac{\omega(p_1\ldots p_{2r})}{p_1\ldots p_{2r}}W(p_{2r})$$

と定める. また $y>1,\ s>0,\ r\geq 1$ において

$$d_{2r-1,y}(s)=\sum_{\substack{g_{2r-1}\leq p_{2r-1}<\cdots<p_1<y^{1/s}\\ p_{2l-1}<g_{2l-1}\ \ (l<r)}} \frac{\omega(p_1\ldots p_{2r-1})}{p_1\ldots p_{2r-1}}W(p_{2r-1})$$

と定める. ただし各 p_i は $\mathcal{P}$ に属するものとしている. ◇

これを用いて次の評価が与えられる:

補題 6.2.13. [Iwa76, p.76 LEMMA 4.] $R\geq 1$ とする. このとき $s\geq 1$ では

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^{-}\\ d|P(y^{1/s})}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}=W(y^{1/s})-\sum_{r=1}^{R} d_{2r,y}(s)-\sum_{\substack{p_{2R+2}<\ldots p_1<y^{1/s}\\ p_{2l}<g_{2l}\ \ (l\leq R)}} \frac{\omega(p_1\ldots p_{2R+2})}{p_1\ldots p_{2R+2}}W(p_{2R+2}) \tag{6.2.14}$$

が成り立ち, また $s>0$ では

$$\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^{+}\\ d|P(y^{1/s})}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}=W(y^{1/s})+\sum_{r=1}^{R} d_{2r-1,y}(s)+\sum_{\substack{p_{2R+1}<\ldots p_1<y^{1/s}\\ p_{2l-1}<g_{2l-1}\ \ (l\leq R)}} \frac{\omega(p_1\ldots p_{2R+1})}{p_1\ldots p_{2R+1}}W(p_{2R+1})$$

が成り立つ. ◇

証明のために積 $W(z)$ における Buchstab の恒等式を示す:

命題 6.2.15. [HR74, pp.204–205, Lemma7.1] $2\leq z_1\leq z$ としたとき,

$$W(z)=W(z_1)-\sum_{z_1\leq p\leq z}\frac{\omega(p)}{p}W(p)$$

が成り立つ. ◇

証明. $\mathcal{P}$ の元のうち z_1 以上のものを $(z_1 \leq) p_1 \leq p_2 \leq \dots$ とする. $z \leq p_1$ であれば $P(z) = P(z_1)$ だから

$$S(\mathcal{A}_q; \mathcal{P}, z) = S(\mathcal{A}_q; \mathcal{P}, z_1),\ W(z) = W(z_1)$$

となり成立は自明である.

$p_1 < z$ とし, 特にある $N \geq 1$ について $p_N < z \leq p_{N+1}$ とする. このとき $\nu = 1, \dots, N$ に対して

$$\begin{aligned} &S(\mathcal{A}_q; \mathcal{P}, p_{\nu+1}) - S(\mathcal{A}_q; \mathcal{P}, p_\nu) \\ &= -|\{a:\ a \in \mathcal{A}_q,\ a \equiv 0 \pmod{p_\nu},\ (a, P(p_\nu)) = 1\}| \\ &= -S(\mathcal{A}_{qp_\nu};\ \mathcal{P},\ p_\nu) \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

となる. また

$$\begin{aligned} W(p_{\nu+1}) - W(p_\nu) &= \prod_{p < p_{\nu+1}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) - \prod_{p < p_\nu} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\ &= \prod_{p < p_\nu} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \left(1 - \frac{\omega(p_\nu)}{p_\nu} - 1\right) \\ &= -\frac{\omega(p_\nu)}{p_\nu} \prod_{p < p_\nu} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\ &= -\frac{\omega(p_\nu)}{p_\nu} W(p_\nu) \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

となる. (6.2.16), (6.2.17) をそれぞれ $\nu = 1, \dots, N$ で足し上げると,

$$S(\mathcal{A}_q; \mathcal{P}, p_{N+1}) - S(A_q; \mathcal{P}, p_1) = -\sum_{\nu=1}^{N} S(\mathcal{A}_{qp_\nu}; \mathcal{P}, p_\nu)$$

$$W(p_{N+1}) - W(p_1) = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\omega(p_\nu)}{p_\nu} W(p_\nu)$$

となる. $z_1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_N \leq z \leq p_{N+1}$ としていたことより主張が従う.

$\square$

補題 6.2.13 の証明. 命題 6.2.15 より $W(z)$ について次の等式が成り立つ.

$$W(z) = 1 - \sum_{p < z} \frac{\omega(p)}{p} W(p)$$

(式の形が (6.2.1) に似ていることが分かる.) この等式を用いて

$$\begin{aligned} W(z) &= 1 - \sum_{p_1 < z} \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1) \\ &= 1 - \left(\sum_{\substack{p_1 < z \\ p_1 < f_1}} + \sum_{f_1 < p_1 < z} \right) \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1) \\ &= 1 - \left(\sum_{\substack{p_1 < z \\ p_1 < f_1}} \frac{\omega(p_1)}{p_1} \left(1 - \sum_{p_2 < p_1} \frac{\omega(p_2)}{p_2}\right)\right) - \sum_{f_1 < p_1 < z} \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1) \\ &= 1 - \sum_{\substack{p_1 < z \\ p_1 < f_1}} \frac{\omega(p_1)}{p_1} - \sum_{f_1 < p_1 < z} \frac{\omega(p_1)}{p_1} W(p_1) + \sum_{\substack{p_2 < p_1 < z \\ p_1 < f_1}} \frac{\omega(p_1 p_2)}{p_1 p_2} \end{aligned}$$

という変形が成り立つが, これは補題 6.2.2 の証明の $n=1$ の議論と平行になっている. これを観察して

$$\begin{gathered}S(\mathcal{A};\mathcal{P},z)\to W(z)\\ |\mathcal{A}|\to 1\\ |A_{p_1\ldots p_i}|\to\frac{\omega(p_1\ldots p_i)}{p_1\ldots p_i}\\ S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_i};\mathcal{P},p_i)\to\frac{\omega(p_1\ldots p_i)}{p_1\ldots p_i}W(p_i)\end{gathered}$$

と置き換えるとそれ以降の議論が平行に進むことが分かる.

この置き換えをもとに (6.2.14) 式のみ示す. まず $S^-(\mathcal{A};\mathcal{P},z)$ は (6.2.11) 式から

$$S^-(\mathcal{A};\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|\to\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^-\\ d|P(z)}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}$$

となる. 次に定義 6.2.12 から

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{g_{2r}\le p_{2r}<\cdots<p_1<y^{1/s}\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l<r)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2r}};\mathcal{P},p_{2r})\to\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{g_{2r}\le p_{2r}<\cdots<p_1<y^{1/s}\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l<r)}}\frac{\omega(p_1\ldots p_{2r})}{p_1\ldots p_{2r}}W(p_{2r})=\sum_{r=1}^{R}d_{2r,y}(s)$$

となり, そして

$$\sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l\le R)}}S(\mathcal{A}_{p_1\ldots p_{2R+2}};\mathcal{P},p_{2R+2})\to\sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<z\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l\le R)}}\frac{\omega(p_1\ldots p_{2R+2})}{p_1\ldots p_{2R+2}}W(p_{2R+2})$$

と置き換えられるから, $z=y^{1/s}$ とすれば (6.2.11) 式は全体として

$$W(y^{1/s})=\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}_y^-\\ d|P(y^{1/s})}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}+\sum_{r=1}^{R}d_{2r,y}(s)+\sum_{\substack{p_{2R+2}<\cdots<p_1<y^{1/s}\\ p_{2l}<g_{2l}\ (l\le R)}}\frac{\omega(p_1\ldots p_{2R+2})}{p_1\ldots p_{2R+2}}W(p_{2R+2})$$

となり (6.2.14) 式が示される.

補題 6.2.5 にこの置き換えを施し, $z=y^{1/s}$ としてやることで主張が示される. □

以上から, 関数 $d_{i,y}(s)$ の評価が要求されることになる. 以下証明は省略して, 大まかに半次元ふるいの主定理 6.1.3 の導出を述べる.

定義 6.2.18. $s\ge 0$ 上の関数 $g_i(s)$ $(i\ge 1)$ を次のように帰納的に定める:

$$\begin{gathered}g_1(s)=\begin{cases}\sqrt{2}-\sqrt{s} & 0\le s\le 2\\ 0 & s\ge 2\end{cases}\\ g_{i+1}(s)=\frac{1}{2}\int_s^\infty\frac{g_i(t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}dt\quad\left(i\ge 1,\ s\ge\frac{3+(-1)^i}{2}\right)\\ g_{2n+1}(s)=g_{2n+1}(2)\quad(n\ge 1,\ 0\le s\le 2)\end{gathered}$$

◇

定義より関数 $g_i(s)$ は半直線 $\left[\frac{3-(-1)^i}{2},\infty\right]$ 上で C^{i-1}-級であり, $\left[\frac{1+(-1)^i}{2},i+1\right]$ を台とする.

補題 6.2.19. [Iwa76, p.79, LEMMA 6.] $i \geq 1,\ s \geq \dfrac{1+(-1)^i}{2}$ において, ある正の実数 $\beta < 1$ が取れて

$$g_i(s) \leq \sqrt{2}\beta^{i-1}e^{-s}$$

が成り立つ. ◇

補題 6.2.19 によって, 次のように $g_i(s)$ の無限和として関数を定めることができる:

定義 6.2.20.

$$f^*(s) := \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i}(s) \quad (s \geq 1)$$
$$F^*(s) := \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i-1}(s) \quad (s \geq 0).$$

◇

補題 6.2.19 から $f^*(s) \ll e^{-s},\ F^*(s) \ll e^{-s}$ が従う. そして $s \geq 1$ において

$$\frac{1}{2}\int_s^{\infty} \frac{F^*(t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}\int_s^{\infty} \frac{g_{2i-1}(t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}dt = \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i}(s) = f^*(s),$$

また $s \geq 2$ においては

$$\frac{1}{2}\int_s^{\infty} \frac{f^*(t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}\int_s^{\infty} \frac{g_{2i}(t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}dt = \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i+1}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{2i-1}(s) = F^*(s)$$

が成り立つ. ただし $s \geq 2$ において $g_1(s) = 0$ であることに注意する.

註 6.2.21.

$$(F(s), f(s)) = \left(1 + \frac{F^*(s)}{\sqrt{s}}, 1 - \frac{f^*(s)}{\sqrt{s}}\right)$$

が成り立っている. ◇

上で定めた $g_i(s)$ の定義と条件 6.1.1 から次が従う.

補題 6.2.22. [Iwa76, p.87, LEMMA 14.] $y > 1,\ i \geq 1,\ \dfrac{1+(-1)^i}{2} \leq s < i+1$ において

$$\sqrt{s}\Omega^{-1}(y^{1/s})d_{i,y}(s) \leq g_i(s) + O(\beta_1^i e^{2K-s}\log^{-\gamma} 3y)$$

が成り立つ.

補題 6.2.23. [Iwa76, p.87, LEMMA 15.] $y > 1,\ i \geq 1,\ \dfrac{1+(-1)^i}{2} \leq s < i+1$ において

$$\sqrt{s}W^{-1}(y^{1/s})d_{i,y}(s) \geq g_i(s) + O\left(\left(\frac{L}{\log 3y}\right)^{\gamma}\beta_1^i e^{K-s}\right)$$

が成り立つ.

定理はこれらを $i = 2k-1, 2k\ (k \geq 1)$ について足し上げることで示される.

7　rough な整数

この章では rough な整数, すなわち素因数の大きさが下から抑えられているような整数の分布について議論する．7.1 節では y-rough な整数の漸近挙動を述べる．7.2 節ではさらに 4 で割ってそれぞれ ± 1 余る y-rough な整数の漸近挙動を述べる．

7.1　y-rough な整数の漸近挙動

補題 7.1.1. [Ten15, p.560, Remark] 関数 $\Phi(x,y)$ は定義 1.2.3 で定めたものとする．$x \geq z \geq y \geq 1$ に対して

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leq z}\sum_{\nu\geq 1}\Phi\left(\frac{x}{p^\nu}, p\right) \tag{7.1.2}$$

$$= \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leq z}\Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) + O\left(\frac{x}{y}\right) \tag{7.1.3}$$

が成り立つ． ◇

証明. 定義より

$$\Phi(x,y) - \Phi(x,z) = \sum_{\substack{1\leq b\leq x \\ y<P_{\min}(b)\leq z}} 1$$

である．和で数え上げる整数 b を $b = p^\nu \cdot m,\ P_{\min}(b) = p(> y)$ と分解する．このとき

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) - \Phi(x,z) &= \sum_{y<p\leq z}\sum_{1\leq\nu}\sum_{\substack{1\leq m\leq x/p^\nu \\ P_{\min}(m)>p}} 1 \\ &= \sum_{y<p\leq z}\sum_{1\leq\nu}\Phi(x/p^\nu, p)\end{aligned}$$

としてまず (7.1.2) が導かれる．(7.1.2) はさらに

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leq z}\Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) + \sum_{y<p\leq z}\sum_{\nu\geq 2}\Phi\left(\frac{x}{p^\nu}, p\right)$$

と変形されて, 最後の和は

$$\sum_{y<p\leq z}\sum_{\nu\geq 2}\Phi\left(\frac{x}{p^\nu}, p\right) \leq \sum_{y<p\leq z}\sum_{\nu\geq 2}\frac{x}{p^\nu} = x\sum_{y<p\leq z}O\left(\frac{1}{p^2}\right) = O\left(\frac{x}{y}\right)$$

となるから (7.1.3) が成立する． □

定理 7.1.4. [Ten15, p.562, Theorem 6.4.] 関数 $\omega(s)$ は定義 4.1.1 で定めたものとする．$x \geq y \geq 2$ において

$$\Phi(x,y) = \frac{x\omega(u) - y}{\log y} + O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{x}{\log^2 y}\right)$$

が成り立つ．ただし $u = \log x/\log y$ と定めている． ◇

証明. y が有界な場合, O-定数を適当に大きく取れば主張は従う. よって y_0 を充分大きい絶対定数として $y \geq y_0$ を仮定する. 以下 u の範囲を変えながら順を追って考察する.

(i) まず $1 \leq u \leq 2$, すなわち $\sqrt{x} \leq y \leq x$ において成立を示す. $\Phi(x,y)$ と $\omega(u)$ の定義から

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \pi(x) - \pi(y) + 1 \\ &= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) - \frac{y}{\log y} + O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right) + 1 \\ &= \frac{x\omega(u) - y}{\log y} + O\left(\frac{x}{\log^2 y}\right)\end{aligned}$$

が従う.

特に

$$\Phi(x,\sqrt{x}) = \frac{x}{\log\sqrt{x}}\omega(2) - \frac{\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}} + O\left(\frac{x}{\log^2\sqrt{x}}\right) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

である.

(ii) 次に $2 \leq u \leq 3$, つまり $x^{1/3} \leq y \leq x^{1/2}$ のときの成立を見る. このとき

$$\frac{y}{\log y} \leq \frac{x^{1/2}}{\log y} \ll \frac{x}{\log^2 y}$$

となるから,

$$\Phi(x,y) = \frac{x\omega(u)}{\log y} + O\left(\frac{x}{\log^2 y}\right)$$

を示せば良い (これは $u > 3$ でも成立していることに注意する). 補題 7.1.1 で $z = \sqrt{x}$ と取れば,

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \Phi(x,\sqrt{x}) + \sum_{y<p\leq\sqrt{x}} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) + O(x^{2/3}) \\ &= \frac{x}{\log x} + \sum_{y<p\leq\sqrt{x}} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\end{aligned}$$

が従う.

ここで右辺に残る和について, $p \leq \sqrt{x}$ より $p \leq x/p$ であり, また $y < p$ と仮定 $x^{1/3} \leq y \leq x^{1/2}$ から $x^{1/2} \leq y^{3/2} < p^{3/2}$ である. 合わせて $\sqrt{x/p} < p \leq x/p$ であるから, 各 $\Phi(x/p,p)$ に (i) の議論が適用されて,

$$\sum_{y<p\leq\sqrt{x}} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) = \sum_{y<p\leq\sqrt{x}} \left(\frac{x/p}{\log(x/p)} - \frac{p}{\log p} + O\left(\frac{x/p}{\log^2 p}\right)\right)$$

となる. 以下右辺の和を各項に分けて評価する.

第 2 項は

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leq\sqrt{x}} \frac{p}{\log p} \leq \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= \frac{4x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\end{aligned}$$

と評価でき, また第 3 項は補題 3.1.7 で $f(z)=1/\log^2 z$ として,

$$\begin{aligned}
\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\frac{f(p)}{p} &= \int_y^{\sqrt{x}}\frac{dx}{x\log^3 x}+O\left(\frac{1}{\log^3 y}+\frac{1}{\log^3\sqrt{x}}\right)+O\left(\int_y^{\sqrt{x}}\frac{dx}{x\log^4 x}\right)\\
&= \frac{u^2-4}{\log^2 x}+O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)\\
&= O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)
\end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{y<p\le\sqrt{x}} O\left(\frac{x/p}{\log^2 p}\right)=O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

である.

そして第 1 項については,

$$\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\frac{x}{p\log(x/p)}=\frac{x}{\log x}\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\frac{\log x/\log p}{\log x/\log p-1}$$

となって, 補題 3.1.7 において

$$f(t)=\frac{1}{1-\log t/\log x}=\frac{\log x/\log t}{\log x/\log t-1}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
&\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\frac{\log x/\log p}{\log x/\log p-1}\\
&=\int_y^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\log t}\frac{\log x/\log t}{\log x/\log t-1}dt+O\left(\frac{f(y)}{\log^a y}+\frac{f(\sqrt{x})}{\log^a\sqrt{x}}\right)\\
&\qquad+O\left(\int_y^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\log^a t}\frac{1}{(1-\log t/\log x)^2}\left(-\frac{1}{t\log x}\right)\right)dt
\end{aligned}$$

となる. 主要項の積分において $\log x/\log t=v$ とおけば

$$\begin{aligned}
\int_y^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\log t}\frac{\log x/\log t}{\log x/\log t-1}dt &= -\int_y^{\sqrt{x}}\frac{1}{\log x/\log t-1}\left(-\frac{\log x}{t\log^2 t}\right)dt\\
&=\int_2^u\frac{dv}{v-1}\\
&=[\log(v-1)]_2^u=\log(u-1)
\end{aligned}$$

であり, 誤差項については,

$$O\left(\frac{f(y)}{\log^a y}+\frac{f(\sqrt{x})}{\log^a\sqrt{x}}\right)=O\left(\frac{f(x^{1/u})}{\log^a x^{1/u}}+\frac{f(\sqrt{x})}{\log^a\sqrt{x}}\right)=O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)\quad,$$

また

$$O\left(\int_y^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\log^a t}\frac{1}{(1-\log t/\log x)^2}\left(-\frac{1}{t\log x}\right)\right)dt=O\left(\frac{1}{\log x}\int_y^{\sqrt{x}}\frac{dt}{t\log^a t}\right)=O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)$$

となる．

よって以上をまとめて

$$\sum_{y<p\le\sqrt{x}}\Phi\left(\frac{x}{p},p\right)=\frac{x}{\log x}\left(\log(u-1)+O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

が従い，

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)&=\frac{x}{\log x}+\left(\frac{x}{\log x}\left(\log(u-1)+O\left(\frac{1}{\log^a x}\right)\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\\&=\frac{x}{\log y}\cdot\frac{1+\log(u-1)}{u}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\\&=\frac{x\omega(u)}{\log y}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\end{aligned}$$

を得る．これで $2\le u\le 3$ での成立が示された．

(iii) あとは $u>3$ での成立が見られれば良い．$\Delta(x,y)$ を

$$\Phi(x,y)=\frac{x}{\log y}\left(\omega(u)+\frac{\Delta(x,y)}{\log y}\right)\tag{7.1.5}$$

という式で定める．この $\Delta(x,y)$ について各整数 $k\ge 3$ において

$$\Delta_k:=\sup\{|\Delta(x,y)|:y\ge y_0,2<u\le k\}$$

を定め，k についての帰納法で Δ_k が k によらず有限であることを示す．

$\Delta_3<\infty$ は既に示されている．$k\ge 3$ を $\Delta_k<\infty$ の成り立つ整数とする．もし x,y が $y\ge y_0$，$k<u\le k+1$ をみたせば式 (7.1.3) に $z=x^{1/3}$ を代入して

$$\Phi(x,y)=\Phi(x,x^{1/3})+\sum_{y<p\le x^{1/3}}\Phi\left(\frac{x}{p},p\right)+O\left(\frac{x}{y}\right)$$

を得る．以下各項の評価を行う．

$\Phi(x,x^{1/3})$ については既に示した (ii) から

$$\begin{aligned}\Phi(x,x^{1/3})&=\frac{x\omega(3)}{\log x^{1/3}}+O\left(\frac{x}{\log^2 x^{1/3}}\right)\\&=\frac{3x\omega(3)}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\end{aligned}$$

が従う．和の部分については帰納法の仮定に注意して，$\theta_p=\theta_p(x)\in[-1,1]$ と取って式 (7.1.5) から

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\le x^{1/3}}\Phi\left(\frac{x}{p},p\right)&=\sum_{y<p\le x^{1/3}}\frac{x/p}{\log p}\left(\omega\left(\frac{\log(x/p)}{\log p}\right)+\frac{\Delta(x/p,p)}{\log p}\right)\\&=\sum_{y<p\le x^{1/3}}\frac{x}{p\log p}\left(\omega\left(\frac{\log x}{\log p}-1\right)+\frac{\theta_p\Delta_k}{\log p}\right)\end{aligned}\tag{7.1.6}$$

である．

式 (7.1.6) の主要項に補題 3.1.7 を

$$f(t)=\frac{1}{\log t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)$$

として用いると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y<p\le x^{1/3}} \frac{1}{p\log p}\omega\left(\frac{\log x}{\log p}-1\right)\\
&=\int_y^{x^{1/3}} \frac{1}{t\log^2 t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)dt+O\left(\frac{1}{\log^{a+1} y}\omega\left(\frac{\log x}{\log y}-1\right)+\frac{1}{\log^{a+1} x^{1/3}}\omega\left(\frac{\log x}{\log x^{1/3}}-1\right)\right)\\
&\qquad+O\left(\int_y^{x^{1/3}}\left(\frac{1}{\log^a t}\left|\left(\frac{1}{\log t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)\right)'\right|\right)dt\right)
\end{aligned}
$$

となる.

やはり積分では $v=\log x/\log t$ と変数変換をして,

$$
\begin{aligned}
\int_y^{x^{1/3}} \frac{1}{t\log^2 t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)dt &= -\frac{1}{\log x}\int_y^{x^{1/3}}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)\left(-\frac{\log x}{t\log^2 t}\right)dt\\
&=\frac{1}{\log x}\int_3^u \omega(v-1)dv\\
&=\frac{1}{\log x}(u\omega(u)-3\omega(3))
\end{aligned}
$$

を得る. また $\omega(t)$ が有界であるから (事実 4.1.4)

$$
O\left(\frac{1}{\log^{a+1} y}\omega\left(\frac{\log x}{\log y}-1\right)+\frac{1}{\log^{a+1} x^{1/3}}\omega\left(\frac{\log x}{\log x^{1/3}}-1\right)\right)=O\left(\frac{1}{\log^{a+1} y}\right)
$$

となる. さらに

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\log t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)\right)' &= -\frac{1}{t\log^2 t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)+\frac{1}{\log t}\left(-\frac{\log x}{t\log^2 t}\right)\omega'\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)\\
&=-\frac{1}{t\log^2 t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)-\frac{\log x}{t\log^3 t}\omega'\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)
\end{aligned}
$$

であって, 定義 4.1.1 および事実 4.1.4 から

$$
\begin{aligned}
|\omega'(s)| &= |\omega(s)-\omega(s-1)|\\
&=|(e^{-\gamma}+O(e^{-s\log s}))-(e^{-\gamma}+O(e^{-(s-1)\log(s-1)}))|\\
&=O(e^{-(s-1)\log(s-1)})
\end{aligned}
$$

より

$$
\frac{\log x}{\log t}\omega'\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)=O(1)
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\int_y^{x^{1/3}}\left(\frac{1}{\log^a t}\left|\left(\frac{1}{\log t}\omega\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)\right)'\right|\right)dt &= O\left(\int_y^{x^{1/3}}\frac{dt}{t\log^{a+2} t}\right)\\
&=O\left(\left[-\frac{1}{\log^{a+1} t}\right]_y^{x^{1/3}}\right)\\
&=O\left(\frac{1}{\log^{a+1} y}\right)
\end{aligned}
$$

を得る.

そして式 (7.1.6) の剰余項の評価のために, 補題 3.1.7 において $f(x) = 1/\log^2 x$ とすれば

$$\begin{aligned}\sum_{y<p<y'} \frac{1}{p\log^2 p} &= \int_y^{y'} \frac{1}{\log^2 x}\frac{dx}{x\log x} + O\left(\frac{1}{\log^3 y} + \frac{1}{\log^3 y'}\right) + O\left(\int_y^{y'} \left(\frac{1}{\log^2 x}\right)' \frac{dx}{\log x}\right) \\ &= \left[-\frac{1}{2\log^2 x}\right]_y^{y'} + O\left(\frac{1}{\log^3 y}\right) \\ &= \frac{1}{2\log^2 y} - \frac{1}{2\log^2 y'} + O\left(\frac{1}{\log^3 y}\right)\end{aligned}$$

となって $y' \to \infty$ として

$$\sum_{y<p} \frac{1}{p\log^2 p} = \frac{1}{2\log^2 y} + O\left(\frac{1}{\log^3 y}\right) \tag{7.1.7}$$

が導かれる. 特に

$$\sum_{p>y} \frac{1}{p\log^2 p} = \frac{1/2 + O(1/\log y)}{\log^2 y} < \frac{3}{4\log^2 y}$$

を得る.

以上より $|\theta| \le 3/4$ として

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\log y}\left(\omega(u) + O\left(\frac{1}{\log^a y}\right)\right) + \frac{x(\theta\Delta_k + o(1))}{\log^2 y}$$

が導かれる.

ここから

$$\Delta_{k+1} \le \max\left(\Delta_k, \frac{3\Delta_k}{4} + C\right)$$

が分かり, $\Delta_k \le \Delta_{k+1}$ より $\Delta_{k+1} \le \max(\Delta_k, 4C)$ となって主張が導かれる. □

ここで導入された $\omega(u)$ という関数の定義は次のように発生したと考えることができる. まず $1 \le u < 2$ における $\Phi(x,y)$ の挙動から

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\log y}\omega\left(\frac{\log x}{\log y}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 y}\right)$$

が成り立つように $\omega(u)$ を定めたいとする. (7.1.3) 式

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,\sqrt{x}) + \sum_{y<p\sqrt{x}} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right) + O\left(\frac{x}{y}\right)$$

にこれを代入して

$$\begin{aligned}\frac{x}{\log y}\omega\left(\frac{\log x}{\log y}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 y}\right) =& \frac{x}{\log\sqrt{x}}\omega\left(\frac{\log x}{\log\sqrt{x}}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2\sqrt{x}}\right) \\ &+ \sum_{y<p\le x}\left(\frac{x/p}{\log p}\omega\left(\frac{\log(x/p)}{\log p}\right) + O\left(\frac{x/p}{\log^2 p}\right)\right) + O\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

が従い, 主要項を抜き出して

$$\frac{x\omega(u)}{\log y} \sim \frac{x}{\log x} + \sum_{y<p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p\log p}\omega\left(\frac{\log x}{\log p} - 1\right) \sim \frac{x}{\log x}\left(1 + \int_2^u \omega(v-1)dv\right)$$

を得る. これが等式になったとして

$$u\omega(u) = 1 + \int_2^u \omega(v-1)dv$$

を得て, 両辺を微分して整理し

$$u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u)$$

という差分微分方程式が導かれる.

7.2 4 で割って ± 1 余る y-rough な整数の各漸近挙動

定理 7.2.1 (定理 2.3.5 再掲)**.** 関数 $B^{\pm}(x,y)$ は定義 1.2.4 で定めたものとする. $y \geq z \geq 2$ に対して

$$B^{\pm}(y,z) = \frac{\omega(u)y - z}{2\log z} + O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{y}{\log^2 z}\right)$$

である. ただし $u = \log y/\log z$ と定めている. ◇

証明. 定理 7.1.4 より

$$B^{+}(y,z) + B^{-}(y,z) = \frac{\omega(u)y - z}{\log z} + O\left(\frac{y}{\log^2 z}\right)$$

であるから,

$$B^{+}(y,z) - B^{-}(y,z) = O\left(\frac{y}{\log^2 z}\right) \tag{7.2.2}$$

が成り立てば辺々和と差をそれぞれ取って主張が示される.

数え上げ関数 $B^{\pm}(y,z)$ でカウントされる整数 b を

$$b = p^{\nu} \cdot m\ ,\ p = P_{\min}(b)\,(> z)$$

と分解する.

このとき

$$\begin{aligned}
B^{+}(y,z) &= \sum_{\substack{1<b\leq y \\ b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4) \\ P_{\min}(b)>z}} 1 \\
&= \sum_{z<p\leq y}\ \sum_{1\leq\nu\leq\log y/\log p}\ \sum_{\substack{1\leq m\leq y/p^{\nu} \\ P_{\min}(m)>p \\ p^{\nu}m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} 1 \\
&= \sum_{z<p\leq y}\left(\sum_{\substack{1\leq\nu\leq\log y/\log p \\ p^{\nu}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\ \sum_{\substack{1\leq m\leq y/p^{\nu} \\ P_{\min}(m)>p \\ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} 1 + \sum_{\substack{1\leq\nu\leq\log y/\log p \\ p^{\nu}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\ \sum_{\substack{1\leq m\leq y/p^{\nu} \\ P_{\min}(m)>p \\ m\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} 1\right) \\
&= \sum_{z<p\leq y}\left(\sum_{\substack{1\leq\nu\leq\log y/\log p \\ p^{\nu}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\left(B^{+}\left(\frac{y}{p^{\nu}},p\right)+1\right) + \sum_{\substack{1\leq\nu\leq\log y/\log p \\ p^{\nu}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} B^{-}\left(\frac{y}{p^{\nu}},p\right)\right)
\end{aligned}$$

が分かる．4 番目の等号において最初の和の「+1」は, $m = 1$ が寄与している．同様にして

$$B^-(y,z) = \sum_{z<p\le y} \left(\sum_{\substack{1\le\nu\le\log y/\log p \\ p^\nu\equiv -1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) + 1 \right) + \sum_{\substack{1\le\nu\le\log y/\log p \\ p^\nu\equiv 1 \pmod 4}} B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) \right)$$

が得られて, 辺々引くと

$$\begin{aligned} B^+(y,z) - B^-(y,z) &= \sum_{z<p\le y} \sum_{\substack{1\le\nu\le\log y/\log p \\ p^\nu\equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) \right) \\ &\quad + \sum_{z<p\le y} \sum_{\substack{1\le\nu\le\log y/\log p \\ p^\nu\equiv -1 \pmod 4}} \left(B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) - 1 - B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) \right) \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

を得る．

$z \ge y$ においては $B^\pm(y,z) = 0$ である．また $z < y \le z^2$ においては算術級数における素数定理から

$$\begin{aligned} B^\pm(y,z) &= \mathrm{card}\{(\sqrt{y} \le)\, z < p \le y\ ,\ p \equiv \pm 1 \pmod 4\} \\ &= \frac{y}{2\log y} - \frac{z}{2\log z} + O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right) \end{aligned}$$

となり,

$$B^+(y,z) - B^-(y,z) \ll \frac{y}{\log^2 y} \ll \frac{y}{\log^2 z}$$

$z < y \le z^2$ での式 (7.2.2) を得る．

さて, $z^n \ge y$ においてある絶対定数 C が取れて,

$$|B^+(y,z) - B^-(y,z)| \le \frac{Cy}{\log^2 z} \tag{7.2.4}$$

だと仮定する．このとき $z^{n+1} \ge y$ における上式の成立が導かれれば主張が示される (帰納法).

まず $z^{n+1} \ge y$ より (7.2.3) 式の和で取られる素数 p は $y^{1/n+1} \le z < p$ をみたすから,

$$\frac{\log y}{\log p} < \frac{\log y}{\log y^{1/n+1}} = n+1,$$

つまり各 p について最大でも $1 \le \nu \le n$ の範囲となる．これを踏まえて, (7.2.3) 式から

$$\begin{aligned} &\sum_{z<p\le y} \sum_{\substack{1\le\nu\le\log y/\log p \\ p^\nu\equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) \right) \\ &= \sum_{\substack{z<p\le y \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p}, p\right) \right) + \sum_{z<p\le y^{1/2}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^2}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^2}, p\right) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{z<p\le y^{1/3} \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^3}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^3}, p\right) \right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \sum_{\substack{z<p\le y^{1/n} \\ p^n\equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^n}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^n}, p\right) \right) \end{aligned}$$

が成り立つ.

すると再び仮定から $y^{1/n+1} < p$ より $y < p^{n+1} \iff y/p < p^n$, 特に各 $\nu = 1, ..., n$ について $y/p^\nu < p^n$ が成り立ち仮定が満たされているので (7.2.4) 式が使える. よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{z<p\leq y} \sum_{\substack{1\leq \nu \leq \log y/\log p \\ p^\nu \equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right)\right) \\
&\leq \sum_{\substack{z<p\leq y \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \left(\frac{Cy}{p\log^2 p} + 1\right) + \sum_{z<p\leq y^{1/2}} \left(\frac{Cy}{p^2\log^2 p} + 1\right) \\
&\qquad + \sum_{\substack{z<p\leq y^{1/3} \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \left(\frac{Cy}{p^3\log^2 p} + 1\right) + \cdots + \sum_{\substack{z<p\leq y^{1/n} \\ p^n\equiv 1 \pmod 4}} \left(\frac{Cy}{p^n\log^2 p} + 1\right)
\end{aligned}$$

が導かれる.

ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{z<p\leq \sqrt{y}} 1 &= \pi(\sqrt{y}) - \pi(z) \\
&= \frac{\sqrt{y}}{\log\sqrt{y}} + O\left(\frac{\sqrt{y}}{\log^2\sqrt{y}}\right) - \frac{z}{\log z} + O\left(\frac{z}{\log^2 z}\right) \\
&= O\left(\frac{\sqrt{y}}{\log y}\right),
\end{aligned}$$

また $k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{z<p\leq\sqrt{y}} \frac{Cy}{p^k\log^2 p} &= Cy \sum_{z<p\leq\sqrt{y}} \frac{1}{p^k\log^2 p} \\
&\leq Cy \sum_{z<n\leq\sqrt{y}} \frac{1}{n^k} \\
&\ll Cy\left(\frac{1}{z^{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{y^{k-1}}}\right) \\
&\ll \frac{y}{z^{k-1}}
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\sum_{k\geq 2} \frac{y}{z^{k-1}} = \frac{y}{z-1} \ll \frac{y}{z}$$

より

$$\begin{aligned}
&\sum_{z<p\leq y} \sum_{\substack{1\leq \nu \leq \log y/\log p \\ p^\nu \equiv 1 \pmod 4}} \left(B^+\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right) + 1 - B^-\left(\frac{y}{p^\nu}, p\right)\right) \\
&\leq Cy \sum_{\substack{z<p\leq y \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{p\log^2 p} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\log y} - \frac{z}{\log z} + O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right)\right) + O\left(\frac{y}{z}\right) + O\left(\frac{\sqrt{y}}{\log y}\right)
\end{aligned}$$

を得る. 同様にして

$$\sum_{z<p\le y}\sum_{\substack{1\le\nu\le\frac{\log y}{\log p}\\ p^\nu\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\left(B^-\left(\frac{y}{p^\nu},p\right)-1-B^+\left(\frac{y}{p^\nu},p\right)\right)$$
$$\le Cy\sum_{\substack{z<p\le y\\ p\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\frac{1}{p\log^2 p}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\log y}-\frac{z}{\log z}+O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right)\right)+O\left(\frac{y}{z}\right)+O\left(\frac{\sqrt{y}}{\log y}\right)$$

となる.

これらを足し合わせて,

$$B^+(y,z)-B^-(y,z)\le Cy\sum_{p>z}\frac{1}{p\log^2 p}+O\left(\frac{y}{z}\right)+O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right)$$

を得る. (定数 C を充分大きく取ることで, 一般性を失わずに z が充分大きいとすることができる.)

(7.1.7) 式より

$$\sum_{p>z}\frac{1}{p\log^2 p}=\frac{1/2+O(1/\log z)}{\log^2 z}<\frac{3}{4\log^2 z}$$

だから, (7.2.4) 式は $z^{n+1}\ge y$ において成立する.

□

命題 7.2.5. [BW00, p.686, Lemma 4.2] $y,z,u\in\mathbb{R}$ が $2\le z\le u\le y$ を満たすとし, 実関数 $g(t)$ を非負値 C^1 級かつ (u,y) 上単調とする. このとき

$$\sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv\pm 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b}-\frac{1}{2\log z}\int_u^y\frac{g(t)}{t}\omega\left(\frac{\log t}{\log z}\right)dt\ll_{\mathrm{ab}}\frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}+\int_u^y\frac{g(t)}{t\log^2 z}dt$$

が成り立つ.

証明. $t\in\mathbb{R}$ が $u\le t\le y$ をみたすとして,

$$s_t=\frac{\log t}{\log z}$$

とする.

$$B^\pm(t,z)=\sum_{\substack{1<b\le t\\ b\equiv\pm 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}1$$

より

$$\sum_{\substack{u<b\le t\\ b\equiv\pm 1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}1=B^\pm(t,z)-B^\pm(u,z)$$

であるから, 部分和法より

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b} &= \sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b}\cdot 1\\
&=\left[\frac{g(t)}{t}(B^{\pm}(t,z)-B^{\pm}(u,z))\right]_{t=u}^{y}-\int_u^y (B^{\pm}(t,z)-B^{\pm}(u,z))\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt\\
&=\frac{g(y)}{y}(B^{\pm}(y,z)-B^{\pm}(u,z))-\int_u^y B^{\pm}(t,z)\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt+B^{\pm}(u,z)\int_u^y\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt\\
&=\frac{g(y)}{y}(B^{\pm}(y,z)-B^{\pm}(u,z))-\int_u^y B^{\pm}(t,z)\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt+B^{\pm}(u,z)\left(\frac{g(y)}{y}-\frac{g(u)}{u}\right)\\
&=\frac{g(y)}{y}B^{\pm}(y,z)-\frac{g(u)}{u}B^{\pm}(u,z)-\int_u^y B^{\pm}(t,z)\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt
\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

が従う.

定理 2.3.5 において $y=t$ とすれば, $u=\log t/\log z=s_t$ となるから

$$\int_u^y B^{\pm}(t,z)\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt-\int_u^y\frac{\omega(s_t)t-z}{2\log z}\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt\ll\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|dt \tag{7.2.7}$$

が成り立つ.

$$\left(\frac{g(t)}{t}\right)'=\frac{g'(t)\cdot t-g(t)}{t^2}=\frac{g'(t)}{t}-\frac{g(t)}{t^2}$$

であり, さらに $\omega(s)$ は $s\in(1,\infty)$ で区分的に C^1 級かつ $|\omega'(s)|\le 1$(事実 4.1.4), そして

$$(\omega(s_t)\cdot t)'=\frac{\omega'(s_t)}{\log z}+\omega(s_t)$$

である.

以上から, (7.2.7) 式に部分積分を施して (7.2.6), 定理 2.3.5 を参照すれば,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b}\\
&=\frac{g(y)}{y}B^{\pm}(y,z)-\frac{g(u)}{u}B^{\pm}(u,z)-\int_u^y\frac{\omega(s_t)t-z}{2\log z}\left(\frac{g(t)}{t}\right)'dt+O\left(\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|dt\right)\\
&=\frac{g(y)}{y}\left(\frac{\omega(s_y)y-z}{2\log z}+O\left(\frac{y}{\log^2 z}\right)\right)-\frac{g(u)}{u}\left(\frac{\omega(s_u)u-z}{2\log z}+O\left(\frac{u}{\log^2 z}\right)\right)\\
&\quad-\left[\frac{\omega(s_t)t-z}{2\log z}\cdot\frac{g(t)}{t}\right]_{t=u}^{y}+\int_u^y\frac{(\omega(s_t)t)'}{2\log z}\cdot\frac{g(t)}{t}dt+O\left(\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|dt\right)\\
&=O\left(\frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}\right)+\int_u^y\frac{g(t)}{2t\log z}(\omega(s_t)t)'dt+O\left(\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|dt\right)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b}-\int_u^y\frac{g(t)}{2t\log z}(\omega(s_t)\cdot t)'dt\ll_{\mathrm{ab}}\frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}+\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)'}{t}\right)\right|dt$$

が従う.

ここからさらに

$$\sum_{\substack{u<b\le y\\ b\equiv \pm 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} \frac{g(b)}{b}-\frac{1}{2\log z}\int_u^y \frac{g(t)}{t}\omega(s_t)dt \ll_{\mathrm{ab}} \frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}+\int_u^y\left(\frac{g(t)}{2t\log^2 z}\omega'(s_t)+\frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|\right)dt$$

と変形でき, 事実 4.1.4 より $|\omega'(s)|\le 1$ と $g(t)$ の単調性より最後の積分が

$$\begin{aligned}\int_u^y \frac{t}{\log^2 z}\left|\left(\frac{g(t)}{t}\right)'\right|dt &\le \int_u^y \frac{t}{\log^2 z}\left|\frac{g'(t)}{t}\right|dt+\int_u^y\frac{t}{\log^2 z}\cdot\frac{g(t)}{t^2}dt\\ &=\left|\int_u^y \frac{g'(t)}{\log^2 z}dt\right|+\int_u^y\frac{g(t)}{t\log^2 z}dt\\ &=\left|\frac{g(y)-g(u)}{\log^2 z}\right|+\int_u^y\frac{g(t)}{t\log^2 z}dt\\ &\ll \frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}+\int_u^y\frac{g(t)}{t\log^2 z}dt\end{aligned}$$

と変形できることから

$$\sum_{\substack{u<b<y\\ b\equiv \pm 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} \frac{g(b)}{b}-\frac{1}{2\log z}\int_u^y \frac{g(t)}{t}\omega(s_t)dt \ll_{\mathrm{ab}} \frac{g(y)+g(u)}{\log^2 z}+\int_u^y\frac{g(t)}{t\log^2 z}dt$$

を得て主張が従う.

□

8 smooth な二平方和数

この章では smooth な, すなわち素因数の大きさが上から抑えられている二平方和数の漸近挙動を述べる

定理 8.1.1 (定理 2.3.4 の再掲)**.** 関数 $A(y,z)$, $\sigma(s)$ はそれぞれ定義 1.2.5, 4.1.6 で定めたものとする. $y,z\in\mathbb{R}, y\ge 2, z\ge 2$ としたとき

$$A(y,z)=\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log y}{\log z}\right)\frac{By}{\sqrt{\log z}}+O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{y}{\log z}+\frac{y}{\log^{3/2} y}\right) \tag{8.1.2}$$

が成り立つ. ◇

証明. y と z の量的関係に基づいて証明をいくつかの段に分ける.

(i) まず $z_0>0$ を充分大きく固定されたものとする. このとき定理 2.3.4 の主張は $z\le z_0$ においては自明となる. (ただし O_{ab} における定数の選び方は z_0 に依ることになる. つまり z_0 に応じて O_{ab} の定数を大きく取ってしまえば良い. それぞれ y の 1 次の項が主要項になる.)

(ii) 次に $z \geq y/z_0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq a \leq y \\ a \equiv 1 \pmod 4 \\ a = \square + \square}} 1 - A(y,z) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq y \\ a \equiv 1 \pmod 4 \\ a = \square + \square \\ {}^{\exists} p \mid a; p > z}} 1 \\
&\leq \sum_{\substack{1 \leq a \leq y \\ {}^{\exists} p \mid a; p > z}} 1 \\
&\leq 1 + \sum_{z < p \leq y} \left(\left[\frac{y}{p} \right] + \left[\frac{y}{p^2} \right] + \left[\frac{y}{p^3} \right] + \cdots \right) \\
&\leq 1 + z_0 \sum_{z < p \leq y} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots \right) \\
&= O\left(\sum_{z < p \leq y} 1 \right)
\end{aligned}
$$

である. ただし $z < p \leq y$ においては, $z \geq y/z_0$ より

$$
\frac{y}{p} < \frac{y}{z} \leq z_0
$$

が成り立つことに注意する.

補題 2.3.1 において $k = 4, l = 1, x = y$ として

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq a \leq y \\ a = \square + \square \\ a \equiv 1 \pmod 4}} 1 &= \frac{(4,4)}{(2,4) \cdot 4} \prod_{\substack{p \mid 4 \\ p \equiv -1 \pmod 4}} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \frac{By}{\sqrt{\log y}} \left(1 + O\left(\frac{\log 8}{\log y} \right) \right) \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log y}} \left(1 + O\left(\frac{\log 8}{\log y} \right) \right) \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log y}} + O\left(\frac{y}{\log^{3/2} y} \right)
\end{aligned}
$$

である (k が固定されていることに注意する). また

$$
O\left(\sum_{z < p \leq y} 1 \right) = O\left(\frac{y}{\log y} \right) = O\left(\frac{y}{\log z} \right)
$$

となって

$$
\begin{aligned}
A(y,z) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq y \\ a \equiv 1 \pmod 4 \\ a = \square + \square}} 1 + O\left(\sum_{z < p \leq y} 1 \right) \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log y}} + O\left(\frac{y}{\log^{3/2} y} + \frac{y}{\log z} \right)
\end{aligned}
$$

が従う.

さて $s=\log y/\log z$ とおけば, 条件 $z \geq y/z_0$ より $0 < s \leq 1$ か $1 \leq s \leq 2$ のいずれかが成り立つ. 前者においては (4.1.8) から

$$\frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\log z}}{\sqrt{\log y}}\cdot\frac{By}{2\sqrt{\log z}} = \frac{By}{2\sqrt{\log y}}$$

で成立する.

また後者においては (4.1.9) 式を用いる. 条件から $\log z \sim \log y$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}) &= \log\left(\sqrt{s}\left(1+\sqrt{\frac{s-1}{s}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\log s + \log\left(1+\sqrt{\frac{s-1}{s}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log(1+(s-1)) + \sqrt{1-\frac{1}{s}} + O\left(1-\frac{1}{s}\right) \\
&= \sqrt{1-\frac{1}{s}} + O\left(1-\frac{1}{s}\right) \quad (s \to 1+0)
\end{aligned}$$

が従うことから, 今度は $z \geq y/z_0$ に注意して

$$\begin{aligned}
(1-\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}))^{-1} &= 1+O(\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1})) \\
&= 1+O\left(\sqrt{1-\frac{1}{s}}\right) \\
&= 1+O\left(\sqrt{\frac{\log y-\log z}{\log y}}\right) \\
&= 1+O\left(\sqrt{\frac{\log y-\log y+\log z_0}{\log y}}\right) \\
&= 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right)
\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
&\frac{By}{2\sqrt{\log y}}\sigma(s)^{-1} \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log y}}\sqrt{s}(1-\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}))^{-1} \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log y}}\sqrt{\frac{\log y}{\log z}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right)\right) \\
&= \frac{By}{2\sqrt{\log z}} + O\left(\frac{y}{\log z}\right)
\end{aligned}$$

となる.

両者をまとめて

$$A(y,z) = \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + O\left(\frac{y}{\log^{3/2} y}+\frac{y}{\log z}\right)$$

となり, この場合の (8.1.2) 式が得られた.

以上から $z_0 < z < y/z_0$ においての考察が残った．ここからは一旦場合分けから離れて Buchstab の恒等式の類似をもとに「反復」を行う．

まず $p \equiv 1 \pmod 4$ のとき，

$$bp = \square + \square \ \Leftrightarrow\ b = \square + \square$$

である．一方 $p \equiv -1 \pmod 4$ のとき，

$$bp = \square + \square \ \Leftrightarrow\ p \mid b \text{ かつ } \frac{b}{p} = \square + \square$$

もわかる．

いま $z_1 \in \mathbb{R}$ を $z < z_1 \le y/z_0$ を満たすものとする．このとき

$$A(y, z_1) - A(y, z) = \sum_{\substack{1 \le a \le y \\ a = \square + \square \\ a \equiv 1 \pmod 4}} \sum_{z < P_{\max}(a) \le z_1} 1$$

である．$p = P_{\max}(a)$ とし，$a = bp$ とすればさらに

$$\begin{aligned}
A(y, z_1) - A(y, z) &= \sum_{\substack{1 \le bp \le y \\ bp = \square + \square \\ bp \equiv 1 \pmod 4}} \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ q \mid b \Rightarrow q \le p}} 1 \\
&= \sum_{z < p \le z_1} \sum_{\substack{1 \le b \le y/p \\ q \mid b \Rightarrow q \le p \\ bp = \square + \square \\ bp \equiv 1 \pmod 4}} 1 \\
&= \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv 1 \pmod 4}} \sum_{\substack{1 \le b \le y/p \\ q \mid b \Rightarrow q \le p \\ b \equiv 1 \pmod 4 \\ b = \square + \square}} 1 + \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv -1 \pmod 4}} \sum_{\substack{1 \le b/p \le y/p^2 \ (p \mid b) \\ q \mid b \Rightarrow q \le p \\ b/p \equiv 1 \pmod 4 \\ b/p = \square + \square}} 1 \\
&= \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv 1 \pmod 4}} A\left(\frac{y}{p}, p\right) + \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv -1 \pmod 4}} A\left(\frac{y}{p^2}, p\right)
\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

が成り立つ．しかし

$$\sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv -1 (\mathrm{mod} 4)}} A\left(\frac{y}{p^2}, p\right) \le \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv -1 (\mathrm{mod} 4)}} \frac{y}{p^2} \le \sum_{n > z} \frac{y}{n^2} \ll \frac{y}{z}$$

が明らかに分かるから，これを (8.1.3) に用いて

$$A(y, z) = A(y, z_1) - \sum_{\substack{z < p \le z_1 \\ p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} A\left(\frac{y}{p}, p\right) + O\left(\frac{y}{z}\right) \tag{8.1.4}$$

を得る．

この (8.1.4) 式を反復して (8.1.2) 式を得る．以下再び場合分けをし証明を続ける．

(iii) まず $\sqrt{y} \le z < y/z_0$ という条件で，$z_1 = y/z_0$ として (8.1.4) を用いる．

$$s = \frac{\log y}{\log z}, \ s_1 = \frac{\log y}{\log z_1} \tag{8.1.5}$$

と書く.

ここで $x=y/p, k=4, l=1$ として補題 2.3.1 を用いる. $y/p \le p$（$\sqrt{y} \le z < p$ より従う）なので $n \le y/p$ たる任意の整数 n は p-smooth である. よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod} 4)}} A\left(\frac{y}{p}, p\right) &= \sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod} 4)}} \sum_{\substack{1\le n\le y/p\\ n\equiv 1 \pmod 4\\ n=\square+\square}} 1\\
&= \sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod} 4)}} \frac{By/p}{2\sqrt{\log(y/p)}}\left(1+O\left(\frac{\log 8}{\log(y/p)}\right)\right) \qquad (8.1.6)\\
&= \sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod} 4)}} \left(\frac{By}{2p\sqrt{\log(y/p)}} + O\left(\frac{y}{p\log^{3/2}(y/p)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

が従う.

さらに補題 3.1.7 で $f(x)=\log^{-r}(y/x)$ としたとき,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\equiv 1 \pmod 4\\ z<p\le z_1}} \frac{1}{p\log^r(y/p)} &= \sum_{\substack{p\equiv 1 \pmod 4\\ z<p\le z_1}} \frac{f(p)}{p}\\
&= \frac{1}{2}\int_z^{z_1} \frac{1}{x\log x}\cdot\frac{1}{\log^r(y/x)}dx\\
&+ O\left(\frac{1}{\log z}\frac{1}{\log^r(y/z)} + \frac{1}{\log z_1}\frac{1}{\log^r(y/z_1)}\right) + O\left(\int_z^{z_1}\left(\frac{1}{\log^r(y/x)}\right)'\frac{1}{\log x}dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_z^{z_1}\frac{dx}{x\log x\log^r(y/x)} + O\left(\frac{1}{\log z}\right) + O\left(\int_z^{z_1}\frac{dx}{x\log x\log^{r+1}(y/x)}\right) \qquad (8.1.7)
\end{aligned}
$$

となる.

ここで $u=\log y/\log x$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
&\int_z^{z_1}\frac{dx}{x\log x\log^r(y/x)}\\
&= \int_s^{s_1} -\frac{\log y}{u^2}\cdot\frac{u}{\log y}\cdot\frac{1}{(1-1/u)^r}\cdot\frac{du}{\log^r y}\\
&= \frac{1}{\log^r y}\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^r}
\end{aligned}
$$

が成り立ち,

$$
\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod} 4)}} \frac{1}{p\log^r(y/p)} = \frac{1}{2\log^r y}\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^r} + O\left(\frac{1}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{\log^{r+1} y}\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^{r+1}}\right) \quad (8.1.8)
$$

となる.

(8.1.5) から

$$
s_1 = 1 + \frac{\log z_0}{\log(y/z_0)}
$$

となり, $r>1$ において

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^r} &= \int_{s_1}^{s}\frac{u^{r-1}}{(u-1)^r}du\\ &\le s^{r-1}\int_{s_1}^{s}(u-1)^{-r}du\\ &= s^{r-1}\left[\frac{1}{1-r}(u-1)^{-r+1}\right]_{s_1}^{s}\\ &\ll s^{r-1}(s_1-1)^{-r+1}\\ &= \left(\frac{\log y}{\log z}\right)^{r-1}\left(\frac{\log z_0}{\log(y/z_0)}\right)^{-r+1}\end{aligned}$$

となって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\log^r y}\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^r} &\ll \frac{1}{2\log^r y}\cdot\frac{\log^{r-1} y}{\log^{r-1} z}\cdot\frac{\log^{r-1}(y/z_0)}{\log^{r-1} z_0}\\ &\ll \frac{\log^{r-2} y}{\log^{r-1} z}\\ &\ll \frac{1}{\log z}\end{aligned}$$

となる. よって (8.1.8) から

$$\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}}\frac{1}{p\log^{3/2}(y/p)} \ll \frac{1}{\log z} \tag{8.1.9}$$

が導かれる.

またさらには,

$$\int_{s_1}^{s}\frac{du}{u(1-1/u)^{1/2}} = \int_{s_1}^{s}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = 2\log\left(\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-1}}{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_1-1}}\right)$$

だから, $1\le s_1<s\le 2$ においては (4.1.9) と (8.1.7) から

$$\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}}\frac{1}{p\log^{1/2}(y/p)} = \frac{\sqrt{s_1}\sigma(s_1)-\sqrt{s}\sigma(s)}{\sqrt{\log y}} + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \tag{8.1.10}$$

を得る.

(8.1.6), (8.1.9), (8.1.10) から,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}} A\left(\frac{y}{p},p\right)\\ &= \sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}}\left(\frac{By}{2p\sqrt{\log(y/p)}} + O\left(\frac{y}{p\log^{3/2}(y/p)}\right)\right)\\ &= \frac{By}{2}\left(\frac{\sqrt{s_1}\sigma(s_1)-\sqrt{s}\sigma(s)}{\sqrt{\log y}} + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right) + O\left(y\cdot\frac{1}{\log z}\right)\\ &= \frac{By}{2\sqrt{\log y}}(\sqrt{s_1}\sigma(s_1)-\sqrt{s}\sigma(s)) + O\left(\frac{y}{\log z}\right)\end{aligned}$$

という評価を得て, (8.1.4) および既に $z=z_1$ では成立する (8.1.2) から, $1 \le s \le 2$ において,

$$\begin{aligned}
A(y,z) &= A(y,z_1) - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} A\left(\frac{y}{p},p\right) + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma(s_1)\frac{By}{\sqrt{\log z_1}} + O\left(\frac{y}{\log^{3/2} y} + \frac{y}{\log z_1}\right) \\
&\quad - \frac{By}{2\sqrt{\log y}}(\sqrt{s_1}\sigma(s_1) - \sqrt{s}\sigma(s)) + O\left(\frac{y}{\log z}\right) + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma(s_1)\frac{By}{\sqrt{\log z_1}} - \frac{1}{2}By\left(\frac{\sigma(s_1)}{\sqrt{\log z_1}} - \frac{\sigma(s)}{\sqrt{\log z}}\right) + O\left(\frac{y}{\log z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + O\left(\frac{y}{\log z}\right)
\end{aligned}$$

が得られた. 以上より $z \ge \sqrt{y}$ においては (8.1.2) の成立がみられた. （なおこの条件により誤差項がひとつに纏められていることに注意する.）

(iv) 最後に $z_0 \le z < \sqrt{y}$ における (8.1.2) の成立を帰納的に見てみよう.

$y \ge 2, z \ge 2$ のとき, $\Delta(y,z)$ を次式で定める:

$$A(y,z) = \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + \frac{y}{\log z}\Delta(y,z) \tag{8.1.11}$$

ここで s は (8.1.5) の通りである.

k を自然数として,

$$\Delta(k) = \max\left\{1, \sup_{z_0 \le z \le y \le z^k} |\ \Delta(y,z)\ |\right\}$$

を定める. このとき, 各 k について帰納法で

$$\Delta(k) \le 3\Delta(2) \tag{8.1.12}$$

を示せば, ここまでに見た $z \ge \sqrt{y}$ での (8.1.2) の成立から $\Delta(2)$ は高々定数であり, $z_0 \le z < \sqrt{y}$ での成立も導かれる.

$k=1,2$ での成立は直ちに従う. （$\Delta(k)$ は k について増加.）

$k \ge 2$ とし, この k で (8.1.12) が成立したとする. （$k+1$ での成立を見て帰納法を回したい. ）このとき $\sqrt{y} \le y/z_0$ および $(k+1)/2 \le k$ より $z_0^2 \le z^2 < y \le z^{k+1}$ をみたす z をひとつ取って固定する. (8.1.4) に $z_1 = \sqrt{y}$ として,

$$s_p = \frac{\log y}{\log p}\left(< \frac{\log y}{\log z} = s \le k+1\right)$$

とおけば, 帰納法の仮定と (8.1.11) から,

$$\begin{aligned}
A(y,z) &= A(y,z_1) - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} A\left(\frac{y}{p},p\right) + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma(s_1)\frac{By}{\sqrt{\log z_1}} + \frac{y}{\log z_1}\Delta(y,z_1) \\
&\quad - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}} \left(\frac{1}{2}\sigma(s_p-1)\frac{By}{p\sqrt{\log p}} + \frac{y}{p\log p}\Delta\left(\frac{y}{p},p\right)\right) + O\left(\frac{y}{z}\right)
\end{aligned} \tag{8.1.13}$$

を得る.

ここで

$$s_x = \frac{\log y}{\log x}, s_z = \frac{\log y}{\log z}$$

とし, 補題 3.1.7 において

$$f(x) = \frac{\sigma(s_x - 1)}{\sqrt{\log x}}$$

と取れば, $z < x \leq z_1$ で $f(x)$ は C^1 級だから

$$\sum_{\substack{z<p\leq z_1 \\ p\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{\sigma(s_p - 1)}{p\sqrt{\log p}} = \frac{1}{2}\int_z^{z_1} \frac{\sigma(s_x - 1)}{x\log^{3/2} x}dx + O\left(\frac{1}{\log^a x}\right) + O\left(\int_z^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx\right)$$

となる.

いま $z^2 < y$ より $s_z > 2$ だから, $\min(s_z, 3) > v > 2$ となる実数 v を一つ固定すると,

$$\int_z^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx = \int_z^{y^{1/v}} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx + \int_{y^{1/v}}^{z_1} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx$$

である. 特に上の積分が広義積分になる箇所について注意して計算する.

まず

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma(s_x - 1)}{\sqrt{\log x}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\log x}}\frac{d}{dx}\sigma(s_x - 1) - \frac{\sigma(s_x - 1)}{2x\log^{3/2} x} \\
&= -\frac{\log y}{x\log^{5/2} x}\sigma'(s_x - 1) - \frac{\sigma(s_x - 1)}{2x\log^{3/2} x}
\end{aligned}$$

まで変形される. 事実 4.1.10 より $\sigma(s) = O(e^{-s\log s})$ だから, 定義 4.1.6 と合わせて $x \leq y^{1/v}$ では

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\log y}{\log x}\sigma'(s_x - 1)\right| &= |s_x\sigma'(s_x - 1)| \\
&\leq s_x(\sigma(s_x - 1) + \sigma(s_x - 2)) \\
&= O\left(s_x\left(\frac{1}{\exp(s_x - 1)} + \frac{1}{\exp(s_x - 2)}\right)\right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

となり, また特に $\sigma(s_x - 1)$ は有界である. よって

$$\left|\frac{d}{dx}f(x)\right| = O\left(\frac{1}{x\log^{3/2} x}\right)$$

となって

$$\begin{aligned}
\int_z^{y^{1/v}} \frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx &= O\left(\int_z^{y^{1/v}} \frac{dx}{x\log^{a+3/2} x}\right) \\
&= O\left(\left[\frac{-1}{\log^{a+1/2} x}\right]_z^{y^{1/v}}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\log^{a+1/2} z}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

そして $\sigma(s_x-1)$ は $y^{1/v}\le x\le z_1=y^{1/2}$ においても有界であるから

$$\int_{y^{1/v}}^{z_1}\frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx \le \int_{y^{1/v}}^{z_1}\frac{\log y}{x\log^{5/2}x}|\sigma'(s_x-1)|dx+\int_{y^{1/v}}^{z_1}\frac{\sigma(s_x-1)}{2x\log^{3/2}x}dx$$
$$=\int_{y^{1/v}}^{z_1}\frac{\log y}{x\log^{5/2}x}|\sigma'(s_x-1)|dx+O\left(\frac{1}{\log^{a+1/2}z}\right)$$

が成り立つ.

また (4.1.9) より $1\le s\le 2$ において $\sigma(s)=s^{-1/2}(1-\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}))$ であったから

$$\sigma'(s)=-\frac{1}{2s}(\sigma(s)+\sigma(s-1))=-\frac{1}{2s\sqrt{s}}(1-\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1}))-\frac{1}{2s\sqrt{s-1}}$$
$$=-\frac{1}{2s\sqrt{s-1}}+O(1)$$

とできる.

一旦これらより

$$O\left(\int_z^{z_1}\frac{|f'(x)|}{\log^a x}dx\right)=O\left(\int_{y^{1/v}}^{y^{1/2}}\frac{1}{2(s_x-1)\sqrt{s_x-2}}\frac{\log y}{x\log^{a+5/2}x}dx+O\left(\frac{1}{\log^{a+1/2}x}\right)\right)$$

が従う. $a\ge 1$ が任意だったので

$$\int_{y^{1/v}}^{y^{1/2}}\frac{1}{2(s_x-1)\sqrt{s_x-2}}\frac{\log y}{x\log^{a+5/2}x}dx$$
$$=O\left(\int_{y^{1/v}}^{y^{1/2}}\frac{1}{(s_x-1)\sqrt{s_x-2}}\frac{\log y}{x\log^4 x}dx\right)$$
$$=O\left(\int_2^v\frac{1}{(s_x-1)\sqrt{s_x-2}}\frac{s_x^2}{\log^2 y}ds_x\right)$$
$$=O\left(\frac{1}{\log^2 y}\int_2^v\frac{s_x^2}{(s_x-1)\sqrt{s_x-2}}ds_x\right)$$
$$=O\left(\frac{1}{\log^2 y}\right)=O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

が従い, 以上から

$$\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\frac{\sigma(s_p-1)}{p\sqrt{\log p}}=\frac{1}{2}\int_z^{z_1}\frac{\sigma(s_x-1)}{x\log^{3/2}x}dx+O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

が従う.

ここで改めて主要項になる積分において $y=x^u$ という変数変換をし

$$\sum_{\substack{z<p\le z_1\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}}\frac{\sigma(s_p-1)}{p\sqrt{\log p}}=\frac{1}{2}\int_s^{s_1}\sigma(u-1)\cdot\frac{u^{3/2}}{\log^{3/2}y}\cdot\left(-\frac{\log y}{u^2}\right)du+O\left(\frac{1}{\log^{3/2}z}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\log y}}\int_{s_1}^{s}\frac{\sigma(u-1)}{\sqrt{u}}du+O\left(\frac{1}{\log^{3/2}z}\right) \tag{8.1.14}$$

を得る.

さらに (4.1.7) から

$$\begin{aligned}
\sqrt{s_1}\sigma(s_1) - \sqrt{s}\sigma(s) &= \int_s^{s_1} (\sqrt{u}\sigma(u))' du \\
&= \int_s^{s_1} \left(\frac{\sigma(u)}{2\sqrt{u}} + \sqrt{u}\sigma'(u) \right) du \\
&= \int_s^{s_1} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{2}\sigma(u) + u\sigma'(u) \right) du \\
&= \int_s^{s_1} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2}\sigma(s-1) \right) du \\
&= \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s} \frac{\sigma(u-1)}{\sqrt{u}} du
\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

が従い, (8.1.11), (8.1.13), (8.1.14), (8.1.15) をまとめて

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{\log z}\Delta(y,z) = A(y,z) - \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} \\
&= \frac{1}{2}\sigma(s_1)\frac{By}{\sqrt{\log z_1}} + \frac{y}{\log z_1}\Delta(y,z_1) \\
&\quad - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} \left(\frac{1}{2}\sigma(s_p - 1)\frac{By}{p\sqrt{\log p}} + \frac{y}{p\log p}\Delta\left(\frac{y}{p}, p\right) \right) - \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{y}{\log z_1}\Delta(y,z_1) - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} \frac{y}{p\log p}\Delta\left(\frac{y}{p}, p\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma(s_1)\frac{By}{\sqrt{\log z_1}} - \frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}} + \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} \frac{1}{2}\sigma(s_p - 1)\frac{By}{p\sqrt{\log p}} + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{y}{\log z_1}\Delta(y,z_1) - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} \frac{y}{p\log p}\Delta\left(\frac{y}{p}, p\right) \\
&\quad + \frac{By}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\log y}} \left((\sqrt{s_1}\sigma(s_1) - \sqrt{s}\sigma(s)) \int_{s_1}^{s} \frac{\sigma(u-1)}{\sqrt{u}} du + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right) \right) + O\left(\frac{y}{z}\right) \\
&= \frac{y}{\log z_1}\Delta(y,z_1) - \sum_{\substack{z<p\le z_1 \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)}} \frac{y}{p\log p}\Delta\left(\frac{y}{p}, p\right) + O\left(\frac{y}{\log^{\frac{3}{2}} z}\right)
\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

が得られる.

ここでしかし $z < p \le z_1$ においては

$$\frac{\log(y/p)}{\log p} = s_p - 1 \le k$$

であり, つまり $y/p \le p^k$ となって

$$|\Delta(y/p, p)| \le \max\{1, \sup_{z_0 \le z \le y \le z^k} |\Delta(y,z)|\} = \Delta(k)$$

である.

また再び補題 3.1.7 において $f(x) = 1/\log x$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod 4 \\ z < p \le z_1}} \frac{1}{p \log p} &= \frac{1}{2} \int_z^{z_1} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x \log x} dx + O\left(\frac{1}{\log^2 z} + \frac{1}{\log^2 z_1}\right) \\
&\quad + O\left(\int_z^{z_1} \left(\frac{1}{\log x}\right)' \frac{1}{\log x} dx\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\log x}\right]_z^{z_1} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right) \\
&= \frac{1}{2\log z} - \frac{1}{2 \log z_1} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)
\end{aligned}$$

がわかる.

従って (8.1.16) から（両辺 $(\log z)/y$ をかけて）

$$\begin{aligned}
|\Delta(y,z)| &\le \left|\frac{\log z}{\log z_1} \Delta(y, z_1)\right| + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \\
&\quad + \left|\frac{\log z}{y} \Delta(k) y \left(\frac{1}{2\log z} - \frac{1}{2\log z_1} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)\right)\right| \\
&\le |\Delta(y, z_1)| + \frac{1}{2}\Delta(k) + O\left(\frac{1}{\log z}\right)
\end{aligned}$$

となる. しかしいま

$$|\Delta(y, z_1)| = |\Delta(y, \sqrt{y})| \le \Delta(2)$$

であったから, 仮定 (8.1.12) と上式より（z_0 が充分大きく取られていたことに気をつけて）

$$|\Delta(y,z)| \le \Delta(2) + \frac{3}{2}\Delta(2) + O\left(\frac{1}{\log z_0}\right) \le 3\Delta(2)$$

となる.

これが範囲 $z_0^2 \le z^2 < y \le z^{k+1}$ で成り立つから

$$\begin{aligned}
\Delta(k+1) &= \max\{1, \sup_{z_0 \le z \le y \le z^{k+1}} |\Delta(y,z)|\} \\
&= \max\{1, \sup_{z_0 \le z \le y \le z^2} |\Delta(y,z)|, \sup_{z_0^2 \le z^2 < y \le z^{k+1}} |\Delta(y,z)|\} \\
&= \max\left\{\Delta(2), \sup_{z_0^2 \le z^2 \le y \le z^{k+1}} \mid \Delta(y,z) \mid \right\} \le 3\Delta(2)
\end{aligned}$$

が分かる. 以上から帰納法が成立して, 定理の主張が示された.

□

$\sigma(u)$ という関数を差分微分方程式によって定義した理由を以下解説する. まず $1 \le s \le 2$ における $A(y,z)$ の挙動から

$$A(y,z) = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \frac{By}{\sqrt{\log z}} + O\left(\frac{y}{\log z}\right)$$

が成り立つように $\sigma(s)$ を定めたいと考える. 式 (8.1.4)

$$A(y,z) = A(y, \sqrt{y}) - \sum_{z < p \le \sqrt{y}} A\left(\frac{y}{p}, p\right) + O\left(\frac{y}{z}\right)$$

にこれを代入して

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log y}{\log z}\right)\frac{By}{\sqrt{\log z}}+O\left(\frac{y}{\log z}\right) \\
&\qquad=\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log y}{\log\sqrt{y}}\right)\frac{By}{\sqrt{\log\sqrt{y}}}+O\left(\frac{y}{\log\sqrt{y}}\right) \\
&\qquad\quad-\sum_{\substack{z<p\le\sqrt{y}\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\left(\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log(y/p)}{\log p}\right)\frac{By/p}{\sqrt{\log p}}+O\left(\frac{y/p}{\log p}\right)\right)+O\left(\frac{y}{z}\right)
\end{aligned}
$$

が従い, 主要項を抜き出して

$$
\frac{1}{2}\sigma(s)\frac{By}{\sqrt{\log z}}\sim\frac{1}{2}\sigma(2)\frac{By}{\sqrt{\log\sqrt{y}}}-\sum_{\substack{z<p\le\sqrt{y}\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{2}\sigma(s_p-1)\frac{By}{p\sqrt{\log p}}
$$

を得る. ここから

$$
\frac{\sigma(s)}{\sqrt{\log z}}\sim\frac{\sqrt{2}\sigma(2)}{\sqrt{\log y}}-\sum_{\substack{z<p\le\sqrt{y}\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{\sigma(s_p-1)}{p\sqrt{\log p}}\sim\frac{\sqrt{2}\sigma(2)}{\sqrt{\log y}}-\frac{1}{2\sqrt{\log y}}\int_2^s\frac{\sigma(u-1)}{\sqrt{u}}du,
$$

すなわち

$$
\sqrt{s}\sigma(s)\sim 1-\frac{1}{2}\int_2^s\frac{\sigma(u-1)}{\sqrt{u}}du
$$

を得る. これを等式と捉えて両辺微分して整理すれば

$$
s\sigma'(s)=-\frac{1}{2}(\sigma(s)+\sigma(s-1))
$$

が導かれる.

9 主定理の証明

この章では主定理の証明を行う. 9.1 節では定理 2.1.7 の証明を行い, Maier matrix $\mathcal{M}_\pm$ に含まれる二平方和数の分布を評価する. 9.2 節では定理 2.1.7 から主定理 1.1.11 を導出する.

9.1 定理 2.1.7 の証明

まず補助として次を示す:

補題 9.1.1. [BW00, p.688] $s=\log y/\log z$ として

$$
sz\ll\log P\ll(s+1)z\ .
$$

◇

証明. (2.1.3) より

$$
\log P=\sum_{\substack{p\le z\\ p\equiv -1 \pmod 4}}\alpha_p\log p
$$

である. また (2.1.2) より

$$\log(4y+1) < \alpha_p \log p \leq \log(4y+1) + 2\log p$$

だから

$$\sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv -1 \pmod 4}} \log(4y+1) < \log P \leq \sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv -1 \pmod 4}} (\log(4y+1) + 2\log p)$$

である. すると算術級数における素数定理 (事実 3.1.5) から

$$\sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv -1 \pmod 4}} \log(4y+1) \sim \frac{z}{2\log z} \log(4y+1) \asymp \frac{z}{\log z} \log y$$

が従う. また部分和法から

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv -1 \pmod 4}} \log p \leq \sum_{p \leq z} 1 \cdot \log p = [\pi(t)\log t]_2^z - \int_2^z \frac{\pi(t)}{t}\, dt \\ \sim \frac{z}{\log z} \log z - \int_2^z \frac{dt}{\log t} \\ \ll z\end{aligned}$$

となって主張が従う. □

以上の準備の下で定理 2.1.7 を示す.

定理 2.1.7 の証明. まず最初に, (2.1.6), (2.2.2) から

$$S^{\pm} = \sum_{1 \leq r \leq y} \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv P_{\pm} + r \pmod P \\ n = \square + \square}} 1 \tag{9.1.2}$$

が従う. これをさらに変形することを考える.

命題 9.1.3. 4^{-1} を $\mathbb{Z}/(P/d^2)\mathbb{Z}$ における 4 の逆元として,

$$S^{\pm} = \sum_{d^2 | P} \sum_{\substack{1 \leq u \leq (4y \pm 1)/d^2 \\ u \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ (u,P)=1}} \sum_{\substack{1 \leq m \leq x/d^2 \\ m \equiv 4^{-1} u \pmod{P/d^2} \\ m = \square + \square}} 1$$

が成り立つ. ◇

証明. P は奇数だから, (9.1.2) の初めの和に係る各 r について, それぞれ $(4, P) = 1$ と $4P_{\pm} \equiv \pm 1 \pmod P$ から

$$(n, P) = (P_{\pm} + r, P) = (4P_{\pm} + 4r, P) = (4r \pm 1, P)$$

である. いま

$$p^{\beta} || (n, P) \quad (\beta > 0) \tag{9.1.4}$$

とすればこれは $p^{\beta} || (4r \pm 1, P)$ $(\beta > 0)$ と同値であるが, $p^{\beta} \leq 4r \pm 1 \leq 4y \pm 1$ かつ

$$p | P = \prod_{\substack{q < z \\ q \equiv -1 \mod 4}} q^{\alpha_q} \quad (q^{\alpha_q} > 4y + 1)$$

より $p^{\beta+1}|P$ が成り立つ．つまり (9.1.4) であれば $p^\beta||n,\ p|P$ であるということだから, (9.1.4) を満たす各 p と $\beta>0$ に対して β は偶数であるか, さもなければ n が二平方和数ではないということになる.

よって (9.1.2) 式の内側の和が自明にならない r の必要条件として $(4r\pm 1,P)=(n,P)$ が平方数になることが挙げられる．このとき, P の約数 d で $d^2|P$ かつ $d^2=(n,P)$ となるものが取れる．（P と P/d^2 のそれぞれの素因数の集合が等しいことに注意する.）

さて, $d^2|P$ を満たす P の約数 d について $(n,P)=d^2$ となることと, ある整数 u が取られて $4r\pm 1=d^2u,\ (u,P)=1$ が成り立つことは同値である．これは

$$(n,P)=(4r\pm 1,P)=(d^2u,P)=(d^2,P)=d^2$$

より従う.

また $(n,P)=d^2$ であるとき, 整数 n が

$$n\equiv P_\pm + r\ (\mathrm{mod}\,P),\ n=\square+\square$$

を満たすことは, $m=n/d^2$ に対して

$$m\equiv (P_\pm + r)/d^2\ (\mathrm{mod}\,P/d^2),\ m=\square+\square$$

が成り立つことと同値である.

以上から

$$S^\pm=\sum_{1\le r\le y}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ n\equiv P_\pm+r\ (\mathrm{mod}\,P)\\ n=\square+\square}}1=\sum_{\substack{1\le r\le y\\ ^\exists d^2|P,^\exists u;4r\pm1=d^2u,(u,P)=1}}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ m=n/d^2\\ m\equiv(P_\pm\pm r)/d^2\ (\mathrm{mod}\,P/d^2),m=\square+\square}}1$$

が導かれる．ここでさらに $4r\pm 1=d^2u$ より $u\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\,4)$ が直ちに従い, また

$$m\equiv (P_\pm\pm r)/d^2\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)$$

から

$$\begin{aligned}4m&\equiv\frac{4(P_\pm+r)}{d^2}\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ &\equiv\frac{4r\pm1}{d^2}\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ &\equiv\frac{d^2u}{d^2}\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ &\equiv u\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\end{aligned}$$

となって $4m\equiv u\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)$ が導かれる．よって,

$$\begin{aligned}S^\pm&=\sum_{\substack{1\le r\le y\\ ^\exists d^2|P,^\exists u;4r\pm1=d^2u,(u,P)=1}}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ ^\exists m;n=d^2m,\\ m\equiv(P_\pm\pm r)/d^2\ (\mathrm{mod}\,P/d^2),m=\square+\square}}1\\ &=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le d^2u=4r\pm1\le 4y\pm1\\ u\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}}\sum_{\substack{1\le d^2m\le x\\ 4m\equiv u\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ m=\square+\square}}1\\ &=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le u\le(4y\pm1)/d^2\\ u\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}}\sum_{\substack{1\le m\le x/d^2\\ m\equiv 4^{-1}u\ (\mathrm{mod}\,P/d^2)\\ m=\square+\square}}1\end{aligned}$$

となり命題 9.1.3 の主張が従う. □

いま得られた変形の最も内側の和に補題 2.3.1 を適用する. x を x/d^2 と取り直し $k = P/d^2,\ l = 4^{-1}u$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
S^{\pm} &= \sum_{d^2|P} \sum_{\substack{1\le u\le (4y\pm1)/d^2 \\ u\equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\,4) \\ (u,P)=1}} \sum_{\substack{1\le m\le x/d^2 \\ m\equiv 4^{-1}u \,(\mathrm{mod}\,P/d^2) \\ m=\square+\square}} 1 \\
&= \sum_{d^2|P} \sum_{\substack{1\le u\le (4y\pm1)/d^2 \\ u\equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\,4) \\ (u,P)=1}} \frac{(4,P/d^2)}{(2,P/d^2)P/d^2} \prod_{p|(P/d^2)} \left(1+\frac{1}{p}\right) \frac{Bx/d^2}{\sqrt{\log(x/d^2)}} \left(1 + O\left(\left(\frac{\log(2P/d^2)}{\log(x/d^2)}\right)^{1/5}\right)\right) \\
&= \sum_{d^2|P} \sum_{\substack{1\le u\le (4y\pm1)/d^2 \\ u\equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\,4) \\ (u,P)=1}} \prod_{p|P} \left(1+\frac{1}{p}\right) \frac{Bx}{P\sqrt{\log(x/d^2)}} \left(1 + O\left(\left(\frac{\log(2P/d^2)}{\log(x/d^2)}\right)^{1/5}\right)\right) \\
&= \prod_{p|P} \left(1+\frac{1}{p}\right) \frac{Bx}{P} \sum_{d^2|P} \frac{1}{\sqrt{\log(x/d^2)}} \left(1 + O\left(\left(\frac{\log(2P/d^2)}{\log(x/d^2)}\right)^{1/5}\right)\right) \sum_{\substack{1\le u\le (4y\pm1)/d^2 \\ u\equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\,4) \\ (u,P)=1}} 1
\end{aligned}
\tag{9.1.5}
$$

まで変形できる. ただし 3 番目の等号で P と P/d^2 の素因数の集合が同一であることを用いた.

ここで (9.1.5) 最右辺の内側の和が 0 にならないためには, 少なくとも $d^2 \le 4y \pm 1$ が必要である. このとき $\log d^2 \ll \log y$ が成り立つから（後に y を x と比べて十分小さく取ることを意識し変形を行う）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\log(x/d^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{\log x}} \frac{1}{\sqrt{1-\log d^2/\log x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{\log d^2}{\log x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{\log y}{\log x}\right)\right),
\end{aligned}
$$

さらに $\log P \ll (s+1)z$ であったことに気をつけて (補題 9.1.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\log(2P/d^2)}{\log(x/d^2)} &= \frac{\log 2 + \log P - \log d^2}{\log x - \log d^2} \\
&\ll \frac{\log P}{\log x} \frac{1}{1-\log d^2/\log x} \\
&\ll \frac{(s+1)z}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{\log d^2}{\log x}\right)\right) \\
&= \frac{(s+1)z}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{\log y}{\log x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる.

よって

$$S^{\pm}=\prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{Bx}{P}\sum_{d^2|P}\frac{1}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{\log y}{\log x}\right)\right)\left(1+O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)\sum_{\substack{1\le u\le (4y\pm1)/d^2\\ u\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}}1$$

$$=R^{\pm}\prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{Bx}{P\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}+\frac{\log y}{\log x}\right)\right) \tag{9.1.6}$$

が従う．ただし

$$R^{\pm}=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le u\le 4y\pm1/d^2\\ u\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)\\ (u,P)=1}}1 \tag{9.1.7}$$

とした．

以下この $R^{\pm}$ を詳しく評価する．

(9.1.7) の内側の和の u について, a' を u の素因数のうち z 以下であるもの全ての積とし, b を同じく u の素因数のうち z より大きいもの全ての積とする．つまり

$$p|a'\Rightarrow p\le z,\quad p|b\Rightarrow p>z$$

が成り立つことになる．これによって $u=a'b$ と一意に表す．そして外側の和の d^2 を用いて $a=a'd^2$ と書けば, $ud^2=ab$ が成り立つ．これらの記法のもとで以下が成り立つ:

まず

$$1\le a'b\le\frac{4y\pm1}{d^2}\quad\Leftrightarrow\quad 1\le b\le 4y\pm1,\ 1\le a\le\frac{4y\pm1}{b}$$

である．次に

$$P=\prod_{\substack{p\le z\\ p\equiv-1\,(\mathrm{mod}\,4)}}p^{\alpha_p}$$

より b は明らかに P と互いに素だから,

$$(u,P)=1\quad\Leftrightarrow\quad(a',P)=1$$

である．再び P の定義に注目すれば a' は $4k+1$ 型の素数の積となることが分かり, 特に $a'\equiv1\,(\mathrm{mod}\,4)$ である．よって

$$u\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)\quad\Leftrightarrow\quad b\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,4)$$

となり, また $ud^2=ba'd^2=ba$ から

$$(a',P)=1\quad\Leftrightarrow\quad a'\text{は }4k+1\text{ 型の素因数のみを持つ．}\quad\Leftrightarrow\quad a=\square+\square,\ a\equiv1\,(\mathrm{mod}\,4)$$

が従う．

以上から, $A(x,y)$ の定義 1.2.5 を思い出して,

$$R^{\pm}=\sum_{d^2|P}\sum_{\substack{1\le u\le(4y\pm1)/d^2\\ u\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ (u,P)=1}}1=\sum_{\substack{1\le b\le 4y\pm1\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\sum_{\substack{1\le a\le(4y\pm1)/b\\ a\equiv1(\mathrm{mod}4)\\ p|a\Rightarrow p\le z\\ a=\square+\square}}1=\sum_{\substack{1\le b\le 4y\pm1\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}A\left(\frac{4y\pm1}{b},z\right)$$

が導かれる．

ところが $b > y$ においては $A\left((4y\pm 1)/b, z\right) \le A(4,z) = 0$ or 1 より，$B^{\pm}(x,y)$ の定義 1.2.4 から

$$
\begin{aligned}
R^{\pm} &= \sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} A\left(\frac{4y\pm1}{b}, z\right) + O\left(\sum_{\substack{y<b\le 4y\pm1\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} 1\right)\\
&= \sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} A\left(\frac{4y\pm1}{b}, z\right) + O\left(\sum_{\substack{1\le b\le 4y\pm1\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} 1\right)\\
&= \sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} A\left(\frac{4y\pm1}{b}, z\right) + O\left(B^{\pm}(4y\pm1, z)\right)
\end{aligned}
$$

と変形できる．

定理 2.3.4 から

$$
A\left(\frac{4y\pm1}{b}, z\right) = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right)\frac{B(4y\pm1)/b}{\sqrt{\log z}} + O_{\mathrm{ab}}\left(\frac{((4y\pm1)/b)}{\log z} + \frac{((4y\pm1)/b)}{\log^{3/2}((4y\pm1)/b)}\right)
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} A\left(\frac{4y\pm1}{b}, z\right)\\
&= \sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} \frac{B(4y\pm1)}{2\sqrt{\log z}}\cdot\frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right) + O\left(\sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\left(\frac{y}{b\log z} + \frac{y}{b\log^{3/2}((4y\pm1)/b)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる．また補題 2.3.5 および式 (4.1.5) から

$$
\begin{aligned}
&O\left(B^{\pm}(4y\pm1, z)\right)\\
&= O\left(\frac{\omega(\log(4y\pm1)/\log z)(4y\pm1)-z}{2\log z} + O\left(\frac{y}{\log^2 z}\right)\right) = O\left(\frac{y}{\log z}\right)
\end{aligned}
$$

である．

以上から，

$$
T_1^{\pm} = \frac{B(4y\pm1)}{2\sqrt{\log z}}\sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right)
$$

$$
T_2^{\pm} = \frac{y}{\log z} + \sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\left(\frac{y}{b\log z} + \frac{y}{b\log^{3/2}((4y\pm1)/b)}\right)
$$

と定めると

$$\begin{aligned}R^{\pm} &= \frac{B(4y\pm 1)}{2\sqrt{\log z}} \sum_{\substack{1\le b\le y \\ b\equiv \pm 1 (\mathrm{mod} 4) \\ p|b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm 1)/b)}{\log z}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{y}{\log z} + \sum_{\substack{1\le b\le y \\ b\equiv \pm 1 (\mathrm{mod} 4) \\ p|b \Rightarrow p>z}} \left(\frac{y}{b\log z} + \frac{y}{b\log^{3/2}((4y\pm 1)/b)}\right)\right) \\ &= T_1^{\pm} + O(T_2^{\pm})\end{aligned} \tag{9.1.8}$$

となる．以下 $T_1^{\pm}, T_2^{\pm}$ をそれぞれ評価する．

まず $T_2^{\pm}$ を評価する．(9.1.8) の b は, $b=1$ か $b>z$ のときのみ和に寄与する．このうち $b=1$ は, さらに T_2^{-} には寄与しない $(b\not\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,4))$ ．T_2^{+} では,

$$\frac{y}{\log z} + \frac{y}{\log^{3/2}(4y\pm 1)} = O\left(\frac{y}{\log z}\right)$$

となってやはり評価に影響しない．

$b>z$ において, 和を定理 7.2.5 および (4.1.5) 式で評価する．まず $u=z$, $g(t)=1$ と取れば,

$$\begin{aligned}\frac{y}{\log z}\sum_{\substack{z\le b\le y \\ b\equiv \pm 1 (\mathrm{mod} 4) \\ p|b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b} &\ll \frac{y}{\log z}\left(\frac{1}{2\log z}\int_z^y \frac{dt}{t} + \frac{2}{\log^2 z} + \int_z^y \frac{1}{\log^2 z}\frac{dt}{t}\right) \\ &\ll \frac{y}{\log^2 z}\int_z^y \frac{dt}{t} \\ &= \frac{y}{\log^2 z}(\log y - \log z) \\ &\ll \frac{y\log y}{\log^2 z}\end{aligned}$$

が導かれる．次に $g(t) = \dfrac{1}{\log^{3/2}((4y\pm 1)/t)}$ と取ると, $u=\log((4y\pm 1)/t)$ として

$$\begin{aligned}\int_z^y \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_z^y \frac{dt}{t\log^{3/2}((4y\pm 1)/t)} &= \int_{\log((4y\pm1)/z)}^{\log((4y\pm1)/y)} \frac{-du}{u^{3/2}} \\ &= \left[2u^{-1/2}\right]_{\log((4y\pm1)/z)}^{\log((4y\pm1)/y)} \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{\log((4y\pm 1)/y)}} - \frac{1}{\sqrt{\log((4y\pm 1)/z)}}\right) \\ &= O(1)\end{aligned}$$

が成り立ち, また

$$\begin{aligned}\frac{g(y)+g(z)}{\log^2 z} &= \frac{1}{\log^2 z}\left(\frac{1}{\log^{3/2}((4y\pm 1)/y)} + \frac{1}{\log^{3/2}((4y\pm 1)/z)}\right) \\ &= \frac{1}{\log^2 z}O(1) = O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
y\sum_{\substack{z\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{g(b)}{b} &\ll y\left(\frac{1}{2\log z}\int_z^y\frac{g(t)}{t}\,dt+\frac{g(y)+g(z)}{\log^2 z}+\frac{1}{\log^2 z}\int_z^y\frac{g(t)}{t}\,dt\right)\\
&\ll y\left(\frac{1}{2\log z}O(1)+O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)+\frac{1}{\log^2 z}O(1)\right)\\
&=O\left(\frac{y}{\log z}\right)
\end{aligned}
$$

である．以上より

$$
\begin{aligned}
T_2^{\pm} &\ll \frac{y}{\log z}+\sum_{\substack{z<b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\left(\frac{y}{b\log z}+\frac{y}{b\log^{3/2}((4y\pm1)/b)}\right)\\
&\ll \frac{y}{\log z}+\frac{y\log y}{\log^2 z}\\
&\ll \frac{(s+1)y}{\log z}
\end{aligned}
$$

である．

次に主要項 $T_1^{\pm}$ の評価をする．事実 4.1.10 および, 定理 7.2.5 は区間上の単調 C^1 級関数 $g(t)$ についてのものだったということを思い出して, (9.1.8) の和の区間を高々有限個の直和に分解し, その上では

$$
g^{\pm}(t)=\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)
$$

が定理 7.2.5 の仮定を満たすようにする．（具体的には,

$$
\begin{aligned}
g^{\pm}(y)&=\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/y)}{\log z}\right)=\sigma\left(\frac{\log((4\pm(1/y))}{\log z}\right)\\
g^{\pm}(z)&=\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/z)}{\log z}\right)=\sigma\left(\frac{\log(4y\pm1)}{\log z}-1\right)
\end{aligned}
$$

であって,

$$
\log((4y\pm1)/t)=\log z\Leftrightarrow t=\frac{4y\pm1}{z}
$$

で和を取る区間を分ける.）

ここで和

$$
\sum_{\substack{1\le b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}}\frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right)
$$

について, 区間 $1<b\le z$ においては $(p|b\Rightarrow p>z)\Rightarrow b>z$ なのだから, b が和に寄与することはなく範囲を $b=1$ または $z<b\le y$ としてよい.

$b=1$ では $z=o(y)$ と事実 4.1.10 から

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right) &= \sigma\left(\frac{\log(4y\pm1)}{\log z}\right)\\ &= O\left(\frac{1}{(\log(4y\pm1)/\log z)^{\log(4y\pm1)/\log z}}\right)\\ &= o\left(\frac{1}{\log z}\right)\end{aligned}$$

となる.

関数 $g^{\pm}(t)$ は t について $[z,y]$ 上単調増加であり区分的 C^1 級であるから, 積分は一旦分けて $t=(4y\pm1)/z$ で合わせればよい. 定理 7.2.5 において $\sigma(u)$ の単調減少性から (事実 4.1.10)

$$g(b)=\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right)$$

と取ることができる.

$$\begin{aligned}T_3^{\pm} &= \frac{1}{2\log z}\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)\omega\left(\frac{\log t}{\log z}\right)dt\\ T_4^{\pm} &= \frac{1}{\log^2 z}\left(\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/y)}{\log z}\right)+\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)dt\right)\end{aligned}$$

と定めれば,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{z<b\le y\\ b\equiv\pm1(\mathrm{mod}4)\\ p|b\Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/b)}{\log z}\right)\\ &= \frac{1}{2\log z}\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)\omega\left(\frac{\log t}{\log z}\right)dt\\ &\quad + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\left(\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/y)}{\log z}\right)+\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)dt\right)\right)\\ &= T_3^{\pm}+O(T_4^{\pm})\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

と変形できるから, $T_3^{\pm},T_4^{\pm}$ をそれぞれ評価する.

まず $T_3^{\pm}$ について $t=z^u$, $\epsilon^{\pm}=\dfrac{\log(4\pm1/y)}{\log z}$ とおくことで

$$\begin{aligned}T_3^{\pm} &= \frac{1}{2\log z}\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log((4y\pm1)/t)}{\log z}\right)\omega\left(\frac{\log t}{\log z}\right)dt\\ &= \frac{1}{2\log z}\int_z^y \frac{1}{t}\sigma\left(\frac{\log y}{\log z}+\frac{\log(4\pm1/y)}{\log z}-\frac{\log t}{\log z}\right)\omega\left(\frac{\log t}{\log z}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_1^s \sigma(s+\epsilon^{\pm}-u)\omega(u)du\end{aligned}$$

と変形できる. $\epsilon^{\pm}=O\left(\dfrac{1}{\log z}\right)$ なので

$$\begin{aligned}T_3^{\pm} &= \frac{1}{2}\int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du+\frac{1}{2}\left(\int_1^s \sigma(s+\epsilon^{\pm}-u)\omega(u)du-\int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)\end{aligned} \tag{9.1.10}$$

を得る．ただし誤差項は $\omega(u)$ の有界性と $\sigma(u)$ の単調性から（それぞれ事実 4.1.4, 4.1.10）

$$
\begin{aligned}
&\int_1^s \sigma(s+\epsilon^{\pm}-u)\omega(u)du - \int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du \\
&\quad = O\left(\int_1^s (\sigma(s+\epsilon^{\pm}-u)-\sigma(s-u))du\right) \\
&\quad = O\left(\int_{1-\epsilon^{\pm}}^{s-\epsilon^{\pm}} \sigma(s-u)du - \int_1^s \sigma(s-u)du\right) \\
&\quad = O\left(\int_{1-\epsilon^{\pm}}^{1} \sigma(s-u)du - \int_{s-\epsilon^{\pm}}^{s} \sigma(s-u)du\right) \\
&\quad \ll \left|\int_{1-\epsilon^{\pm}}^{1} du\right| + \left|\int_{s-\epsilon^{\pm}}^{s} \sigma(s-u)du\right| \\
&\quad = \epsilon^{\pm} + \left|\left[2\sqrt{s-u}\right]_{u=s-\epsilon^{\pm}}^{s}\right| \\
&\quad = \frac{1}{\log z} + 2\sqrt{\epsilon^{\pm}} \\
&\quad \ll \sqrt{\frac{1}{\log z}}
\end{aligned}
$$

と評価している．

同様に $t = z^u$, $\epsilon^{\pm} = \dfrac{\log(4 \pm 1/y)}{\log z}$ とおくことで $T_4^{\pm}$ も変形して

$$
\begin{aligned}
T_4^{\pm} &= \frac{1}{\log^2 z}\left(\sigma\left(\frac{\log((4y\pm 1)/y)}{\log z}\right) + \int_z^y \sigma\left(\frac{\log((4y\pm 1)/t)}{\log z}\right)\frac{dt}{t}\right) \\
&= \frac{1}{\log^2 z}\left(\sigma(\epsilon^{\pm}) + \int_z^y \sigma\left(\frac{\log((4y\pm 1)/t)}{\log z}\right)\frac{dt}{t}\right)
\end{aligned}
$$

である．$\epsilon \to 0$ $(z \to \infty)$ より, (4.1.8) 式から

$$
\sigma(\epsilon^{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^{\pm}}} = \sqrt{\frac{\log z}{\log(4 \pm 1/y)}} = O(\sqrt{\log z})
$$

である．また (4.1.11) 式より,

$$
\begin{aligned}
\int_z^y \sigma\left(\frac{\log((4y\pm 1)/t)}{\log z}\right)\frac{dt}{t} &= \log z \int_1^s \sigma(s+\epsilon^{\pm}-u)du \\
&< \log z \int_0^{\infty} \sigma(t)dt \\
&= \sqrt{\pi e^{\gamma}} \log z
\end{aligned}
$$

を得る．

以上と (9.1.9) から

$$
\begin{aligned}
T_4^{\pm} &\ll \frac{1}{\log^2 z}\left(\sqrt{\log z} + \sqrt{\pi e^{\gamma}}\log z\right) \\
&\ll \frac{1}{\log z}
\end{aligned}
\tag{9.1.11}
$$

が従う．

(9.1.8), (9.1.9), (9.1.10), (9.1.11) をまとめると次が従う.

$$
\begin{aligned}
R^+ &= T_1^+ + O(T_2^+) \\
&= \frac{B\cdot(4y+1)}{2\sqrt{\log z}} \sum_{\substack{1\le b\le y \\ b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4) \\ p\mid b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y+1)/b)}{\log z}\right) + O(T_2^+) \\
&= \frac{B\cdot(4y+1)}{2\sqrt{\log z}} \left(\sigma\left(\frac{\log(4y+1)}{\log z}\right) + \sum_{\substack{z<b\le y \\ b\equiv 1(\mathrm{mod}4) \\ p\mid b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y+1)/b)}{\log z}\right)\right) + O(T_2^+) \\
&= \frac{B\cdot(4y+1)}{2\sqrt{\log z}} \left(\sigma\left(\frac{\log(4y+1)}{\log z}\right) + T_3^+ + O(T_4^+)\right) + O(T_2^+) \\
&= \frac{B\cdot(4y+1)}{2\sqrt{\log z}} \left(\sigma\left(\frac{\log(4y+1)}{\log z}\right) + \frac{1}{2}\int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) + O\left(\frac{(s+1)y}{\log z}\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(2\sigma\left(\frac{\log(4y+1)}{\log z}\right) + \int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) + O\left(\frac{(s+1)y}{\log z}\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(2\sigma(s+\epsilon^\pm) + \int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(2\sigma(s) + \int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}}F(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

を得る. ただし八番目の等号では平均値の定理より, ある実数 $m \in (s, s+\epsilon_\pm)$ を用いて

$$\sigma(s+\epsilon_\pm) - \sigma(s) = \epsilon_\pm \sigma'({}^\exists m) \ll \frac{1}{\log z}$$

と評価できることに注意する.

同様にして

$$\begin{aligned}
R^- &= T_1^- + O(T_2^-) \\
&= \frac{B\cdot(4y-1)}{2\sqrt{\log z}} \sum_{\substack{1\le b\le y \\ b\equiv -1 \pmod 4 \\ p|b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y-1)/b)}{\log z}\right) + O(T_2^-) \\
&= \frac{B\cdot(4y-1)}{2\sqrt{\log z}} \left(\sum_{\substack{z< b\le y \\ b\equiv -1 (\mathrm{mod} 4) \\ p|b \Rightarrow p>z}} \frac{1}{b}\sigma\left(\frac{\log((4y-1)/b)}{\log z}\right) \right) + O(T_2^-) \\
&= \frac{B\cdot(4y-1)}{2\sqrt{\log z}} \left(T_3^- + O(T_4^-)\right) + O(T_2^-) \\
&= \frac{B\cdot(4y-1)}{2\sqrt{\log z}} \left(\frac{1}{2}\int_1^s \sigma(s-u)\omega(u)du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) + O\left(\frac{(s+1)y}{\log z}\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) + O\left(\frac{(s+1)y}{\log z}\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\int_1^s \omega(u)\sigma(s-u)du + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \\
&= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} f(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる．それぞれまとめて

$$\begin{aligned}
R^+ &= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} F(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \\
R^- &= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} f(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)
\end{aligned}$$

を得る．

これらを (9.1.6) に代入して, $\mathcal{F}^+(s) = F(s)$, $\mathcal{F}^-(s) = f(s)$ とすれば,

$$\mathcal{C} = \prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right),\ \mathcal{D} = \frac{Bx}{P\sqrt{\log x}}\frac{By}{\sqrt{\log z}}$$

として,

$$\begin{aligned}
S^\pm &= \frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} \mathcal{F}^\pm(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right) \frac{Bx}{P\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right) + \frac{\log y}{\log x}\right) \\
&= \prod_{p|P}\left(1+\frac{1}{p}\right) \frac{Bx}{P\sqrt{\log x}}\frac{By}{\sqrt{\log z}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} \mathcal{F}^\pm(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right) + \frac{s\log z}{\log x}\right) \\
&= \mathcal{C}\mathcal{D} \left(\sqrt{\frac{\pi}{e^\gamma}} \mathcal{F}^\pm(s) + O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right) \left(1 + O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)
\end{aligned} \tag{9.1.12}$$

が導かれる.

ここで次の主張を示す:

命題 9.1.13. $z \to \infty$ において

$$\mathcal{C} = \sqrt{\frac{e^{\gamma}}{\pi}} \frac{\sqrt{\log z}}{B} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)$$

である. ◇

証明. χ_4 を法 4 での非自明な Dirichlet 指標としていたから,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
&= \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} \\
&= \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} \cdot 2^{-1/2} \cdot 2^{1/2} \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} \\
&= \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} \cdot 2^{-1/2} \cdot \prod_{p \le z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \prod_{p \le z} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

まで変形される. この変形の最後に出てきた 3 つの積を順に考える.

(i) 最初の積は log を取ると, ある正の定数 a を用いて

$$\begin{aligned}
\log \prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \log \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{p^{2n}} \\
&\ll \sum_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \frac{1}{p^2} = a + O\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

と変形され,

$$\prod_{\substack{p \le z \\ p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} \ll e^{1/z} = C\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

とできる. (1.1.6) 式より $C = (\sqrt{2}B)^{-1}$ と取れる.

(ii) 2 番目の積は, Mertens の定理 [Kou19, p.40, Theorem 3.4] より

$$\prod_{p \le z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log z} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)$$

と, $x \to 0$ において

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} = \sqrt{1 - x + O(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2) = 1 + O(x)$$

とできることから

$$\begin{aligned}
\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/2} &= \sqrt{\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}} \\
&= \sqrt{\frac{e^\gamma \log z}{1+O(1/\log z)}} \\
&= \sqrt{e^\gamma \log z}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)
\end{aligned}$$

が分かる.

(iii) 3 番目の積は定理 3.2.6 から

$$\begin{aligned}
\prod_{p\le z}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)^{1/2} &= \sqrt{\frac{1}{\pi/4+O(1/\log z)}} \\
&= \sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{1+O(1/\log z)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる.

以上より

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2}B}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e^\gamma \log z}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\frac{\sqrt{\log z}}{B}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)
\end{aligned}$$

となって命題 9.1.13 の主張が従う. □

これを (9.1.12) 式に代入して

$$S^\pm = \frac{Bxy}{P\sqrt{\log x}}\left(\mathcal{F}^\pm(s)+O\left(\frac{s+1}{\sqrt{\log z}}\right)\right)\left(1+O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)\right)$$

を得て定理 2.1.7 の主張にたどり着く. □

9.2 本証明

定理 1.1.11 の証明. いま固定された N に対して

$$y = \log^N x, z = \frac{\log x}{\log\log x}$$

ととる．このとき

$$\begin{aligned} s = \frac{\log z}{\log y} &= N + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \\ F(s) &= F(N) + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \\ f(s) &= f(N) + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．これはまず

$$\begin{aligned} s = \frac{\log y}{\log z} &= \log(\log x)^N / \log(\log x / \log\log x) \\ &= \frac{N\log\log x}{\log\log x - \log\log\log x} \\ &= N \cdot \frac{1}{1 - ((\log\log\log x)/(\log\log x))} \\ &= N\left(1 + \frac{\log\log\log x}{\log\log x} + \left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)^2 + \cdots\right) \\ &= N + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \end{aligned}$$

より第 1 式が成立する．また関数 F に微積分学の基本定理と積分における平均値の定理から，

$$\begin{aligned} F(s) - F(N) = \int_N^s F'(x)dx &= (s-N)F'(\xi) \qquad ({}^{\exists}\xi \in [N,s]) \\ &= O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし区間 $[N,s]$ は x が充分大きければ区間 $[N,N+1]$ 内に入るから，$[N,s]$ 上 F は C^1 級であることに注意する．これにより第 2 式が成立する．f についても同じ議論から第 3 式が成立する．

さらに

$$\frac{N\log x}{\log\log x} \ll \log P \ll \frac{(N+1)\log x}{\log\log x}$$

が成り立つ．これは補題 9.1.1 に

$$s = \frac{\log z}{\log y} = N + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right), \quad z = \frac{\log x}{\log\log x}$$

を代入して直ちに従う．

ここで定理 2.1.7 に，

$$\begin{aligned} F(s) &= F(N) + O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \\ s+1 &= N+1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right) \\ \sqrt{\log z} &= \sqrt{\log\frac{\log x}{\log\log x}} = \sqrt{\log\log x - \log\log\log x} \end{aligned}$$

を適用すると

$$O\left(\frac{s+1}{\log z}\right)=O\left(\frac{N+1+O((\log\log\log x)/(\log\log x))}{\sqrt{\log\log x}}\right)=O_N\left((\log\log x)^{-1/2}\right)$$
$$O\left(\left(\frac{(s+1)z}{\log x}\right)^{1/5}\right)=O\left(\left(\frac{(N+1+o(1))\log x/\log\log x}{\log x}\right)^{1/5}\right)=O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)$$

という評価が成り立っているので

$$\begin{aligned}S^+(x,y,z)&=\frac{Bxy}{P\sqrt{\log x}}\left(F(N)+O_N\left((\log\log x)^{-1/2}\right)\right)\left(1+O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)\right)\\&=\frac{Bxy}{P\sqrt{\log x}}\left(F(N)+O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)\right)\end{aligned}$$

が分かる.

同様にして

$$\begin{aligned}S^+\left(\frac{1}{2}x,y,z\right)&=\frac{Bxy}{2P\sqrt{\log(x/2)}}\left(F(N)+O_N\left((\log\log(x/2))^{-1/5}\right)\right)\\&\sim\frac{Bxy}{2P\sqrt{\log x}}\left(F(N)+O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)\right)\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$S^+(x,y,z)-S^+\left(\frac{1}{2}x,y,z\right)=\frac{Bxy}{2P\sqrt{\log x}}\left(F(N)+O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)\right)\tag{9.2.1}$$

も分かる. 平行な議論を S^- に用いて

$$S^-(x,y,z)-S^-\left(\frac{1}{2}x,y,z\right)=\frac{Bxy}{2P\sqrt{\log x}}\left(f(N)+O_N\left((\log\log x)^{-1/5}\right)\right)$$

が分かる.

ここで, $\mathcal{M}_+(x,y,z)$ に含まれる少なくとも 1 つの区間は $\mathcal{M}_+(x/2,y,z)$ に含まれずに,

$$\frac{By}{\sqrt{\log x}}(F(N)+o(1))$$

個以上の二平方和数を含むことを示したい. そのために以下の 3 つの主張を示す.

命題 9.2.2. $x\to\infty$ において以下が成立する:

- $\mathcal{M}_+$ の各区間は重複しない.
- $\mathcal{M}_+$ の行数は発散する.
- $\mathcal{M}_+(x,y,z)$ とその部分集合 $\mathcal{M}_+(x/2,y,z)$ はそれぞれ長方形様に取れる.

◇

証明. まず区間に重複がないことを示す. $\mathcal{M}_+$ の前の区間の終端と, 次の区間の始端の差は

$$(P+(P_++1))-(P_++[y])=P+1-[y]$$

で与えられる. よって $y=o(P)$ が $x\to+\infty$ で成り立てば良い.

$$\frac{N\log x}{\log\log x}\ll\log P$$

より

$$P \gg \exp\left(\frac{N\log x}{\log\log x}\right),$$

一方で

$$y = \log^N x = \exp(\log\log^N x) = \exp(N\log\log x)$$

である．

$$N\log\log x = o\left(\frac{N\log x}{\log\log x}\right)$$

だから主張が従う．

次に $\mathcal{M}_+$ の行数が $x \to +\infty$ で発散することを示す．ある正定数 C を用いて

$$\log P \le C\frac{(N+1)\log x}{\log\log x}$$

とできるから，

$$P \le \exp\left(C\frac{(N+1)\log x}{\log\log x}\right) \le x^{C(N+1)/\log\log x},$$

よって

$$\frac{x}{P} \ge \frac{x}{x^{C(N+1)/\log\log x}} = x^{1-(C(N+1)/\log\log x)} \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

となって主張が従う．

そして $\mathcal{M}_+(x,y,z)$ とその部分集合 $\mathcal{M}_+(x/2,y,z)$ が長方形様に取れないときとは，ある整数 n, n' について

$$nP + (P_+ + 1) \le x < nP + (P_+ + [\log^N x]),$$
$$n'P + (P_+ + 1) \le x/2 < n'P + (P_+ + [\log^N (x/2)])$$

となる場合である．このとき，x が充分に大きいとして x を $x + 2\log^N x$ に置き換えても $nP + (P_+ + [\log^N x]), n'P + (P_+ + [\log^N (x/2)])$ が値を変えなければ $\mathcal{M}_+(x,y,z)$ および $\mathcal{M}_+(x/2,y,z)$ を長方形となるように取り直せたことになる．

定義より $P_+ < P$ だから，P と $[\log^N x]$ が増加しなければ良い．P の増加については

$$P = \prod_{\substack{p \le (\log x/(\log\log x)) \\ p \equiv -1 \pmod 4}} p^{\alpha_p}, \quad \alpha_p : p^{\alpha_p} > 4\log^N x + 1 \ge p^{\alpha_p - 2}$$

だから

$$\left[\frac{\log x}{\log\log x}\right], \quad [4\log^N x] \tag{9.2.3}$$

が増加しなければ良い．まとめると x を $x + 2\log^N x$ に置き換えたとき (9.2.3) が増加しなければ良いということになる．$\log(1+x) \le x$ $(x \ge 0)$ より

$$\begin{aligned}\frac{\log(x + 2\log^N x)}{\log\log(x + 2\log^N x)} &\le \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{2\log^N x}{x}\right)}{\log\log x} \\ &\le \frac{\log x}{\log\log x} + \frac{1}{\log\log x}\frac{2\log^N x}{x}\end{aligned}$$

そして

$$
\begin{aligned}
4\log^N(x+2\log^N x) &= 4\log^N\left(x\left(1+\frac{2\log^N x}{x}\right)\right)\\
&= 4\left(\log x + \log\left(1+\frac{2\log^N x}{x}\right)\right)^N\\
&\le 4\left(\log x + \frac{2\log^N x}{x}\right)^N\\
&= 4\log^N x\left(1+\frac{2\log^{N-1} x}{x}\right)^N\\
&= 4\log^N x\left(1+\frac{2N\log^{N-1} x}{x}+O_N\left(\frac{\log^{2N-2} x}{x^2}\right)\right)\\
&\le 4\log^N x+\frac{16N\log^{N-1} x}{x}
\end{aligned}
$$

だから, 両者ともに x が充分大きくなれば増分は充分に小さくなる. $\square$

この状況で, もし $\mathcal{M}_+(x,y,z)-\mathcal{M}_+(x/2,y,z)$ に含まれる短区間がすべて $0\le\alpha<1$ なる実数 α を用いて

$$
\frac{\alpha By}{\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))
$$

以下の二平方和数しか含まないとすると,

$$
\begin{aligned}
&S^+(x,y,z)-S^+\left(\frac{1}{2}x,y,z\right)\\
&\le\left(\frac{x}{2P}+O(1)\right)\frac{\alpha By}{\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))\\
&=\frac{\alpha Bxy}{2P\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&=\frac{\alpha Bxy}{2P\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))\\
&<\frac{Bxy}{2P\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))
\end{aligned}
$$

が成り立つが, (9.2.1) と矛盾する. よって $\mathcal{M}_+(x,y,z)$ の下半分の短区間のうち少なくとも 1 つは

$$
\frac{By}{\sqrt{\log x}}(F(N)+o_N(1))
$$

個以上の二平方和数を含むことになる. (鳩ノ巣原理)

$\mathcal{M}_-(x,y,z)$ についても同様の議論が成り立ち, 定理 1.1.4 の成立が見られる.

$\square$

参考文献

[AO65] N. C. Ankeny and H. Onishi. The general sieve. *Acta Arith*, Vol. 10, pp. 31–62, 1964/1965.

[BW00] Antal Balog and Trevor D. Wooley. Sums of two squares in short intervals. *Canad. J. Math.*, Vol. 52, No. 4, pp. 673–694, 2000.

[Cha68] K. Chandrasekharan. *Introduction to analytic number theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 148. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1968.

[FI10] John Friedlander and Henryk Iwaniec. *Opera de cribro*, Vol. 57 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve methods.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. London Mathematical Society Monographs, No. 4.

[Hux72] M. N. Huxley. On the difference between consecutive primes. *Invent. Math.*, Vol. 15, pp. 164–170, 1972.

[Iwa76] H. Iwaniec. The half dimensional sieve. *Acta Arith.*, Vol. 29, No. 1, pp. 69–95, 1976.

[Kab08] Anthony C. Kable. A variation of the Ikehara-Delange Tauberian theorem and an application. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, Vol. 57, No. 2, pp. 137–146, 2008.

[Kou19] Dimitris Koukoulopoulos. *The distribution of prime numbers*, Vol. 203 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, [2019] ©2019.

[Lan53] Edmund Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 Bände.* Chelsea Publishing Co., New York, 1953. 2d ed, With an appendix by Paul T. Bateman.

[Mai85] Helmut Maier. Primes in short intervals. *Michigan Math. J.*, Vol. 32, No. 2, pp. 221–225, 1985.

[Pra53] Karl Prachar. Über Zahlen der Form a^2+b^2 in einer arithmetischen Progression. *Math. Nachr.*, Vol. 10, pp. 51–54, 1953.

[Rie65] G. J. Rieger. Über die Anzahl der als Summe von zwei Quadraten darstellbaren und in einer primen Restklasse gelegenen Zahlen unterhalb einer positiven Schranke. II. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 217, pp. 200–216, 1965.

[Roy90] Ranjan Roy. The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Math. Mag.*, Vol. 63, No. 5, pp. 291–306, 1990.

[Ten15] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Vol. 163 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 2015. Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion.

[伊藤 63] 伊藤清三. ルベーグ積分入門. 裳華房, 1963.

[高木 83] 高木貞治. 解析概論 改訂第三版. 岩波書店, 1983.

[小山 15] 小山信也. 素数とゼータ関数. 共立出版, 2015.

[雪江 14] 雪江明彦. 整数論 3 解析的整数論への誘い. 日本評論社, 2014.