

線形代数学 A 期末試験 2017 年 7 月 28 日 雪江明彦

問題 1.

(1) (5 点) 4×10 行列 A に左からかけると A の第 2 行の 4 倍が第 4 行に足される行列は何か?

(2) (5 点) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の符号を求めよ.

問題 2. (15 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) (10 点) A の逆行列を求めよ.

(2) (5 点) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 2, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 & = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ.

問題 3. (15 点) 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1998 & 2 & -4003 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1002 & 1 & -1999 & 1 \\ 3000 & 3 & -6002 & 0 \end{pmatrix}$$

裏にも問題があります.

問題 4. (15 点)

(1) $W = \{f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f''(x) + \sin(x^2)f'(x) - 2f(x) = 0\} \subset V = C^\infty(\mathbb{R})$ は部分空間か?

(2) $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \neq 1\} \subset V = \mathbb{R}^3$ は部分空間か?

問題 5. (15 点)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とする. v_1, \dots, v_4 のうちの 1 つを他のベクトルの 1 次結合で表せ.

問題 6. (15 点) V を $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像全体よりなるベクトル空間とする. また, W を V から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像全体よりなるベクトル空間とする. $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$ で定義される関数とし, $S_1, S_2, S_3 \in W$ を $T \in V$ に対して

$$S_1(T) = T(f_1), S_2(T) = T(f_2), S_3(T) = T(f_3)$$

と定義する ($S_1, S_2, S_3 \in W$ であることは認める). $\{S_1, S_2, S_3\}$ が 1 次独立であることを証明せよ.

問題 7. (15 点) A が $n \times n$ 行列でスカラー行列でないなら $n \times n$ 行列 B で $AB \neq BA$ となるものがあることを証明せよ.