Notes on the paper "*Sparse bounds for Bochner-Riesz multipliers*", by M.T. Lacey, D. Mena and M.C. Reguera

筒井 容平

1 Introduction

Cube Q に対して, $c(Q)$ と $\ell(Q)$ をそれぞれ Q の中心, 辺の長さとする.

For any $\alpha \in \{0,1,2\}^n$, we define *dyadic lattices*

$$\mathscr{D}^\alpha := \left\{2^{-k}\left([0,1)^n + m + (-1)^k\alpha/3\right); k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n\right\}.$$

次の補題はよく知られているので, ここでは証明なしで用いることとする. [5] には, より強い主張が書かれているがここでは必要ない.

Lemma 1.1 ([5])**.** *For any cube $Q \subset \mathbb{R}^n$, there is a cube $\tilde{Q} \in \mathscr{D}^\alpha$ for some $\alpha \in \{0,1,2\}^n$ such that $Q \subset \tilde{Q}$ and $3\ell(Q) < \ell(\tilde{Q}) \le 6\ell(Q)$.*

次に, *sparse family* と *sparse form* を定義する.

Definition 1.1. (1) $\eta \in (0,1)$ とする. $\mathbb{R}^n$ の *cube* の族 $\mathcal{S}$ が *η-sparse family* $\iff$ *for any $Q \in \mathcal{S}$ there exists $E_Q \subset Q$ such that $\{E_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$ is pairwise disjoint and $|E_Q| \ge \eta|Q|$.*

(2) $\mathbb{R}^n$ の *cube* の族 $\mathcal{S}$ と $1 \le r, s \le \infty$ に対して,

$$\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g) := \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|X(Q), \text{ where } X(Q) := X_{r,s}(Q) := \langle f\rangle_{Q,r}\langle g\rangle_{Q,s},$$

and $\langle f\rangle_{Q,r} := |Q|^{-1/r}\|f\|_{L^r(Q)}$ *if* $r < \infty$ *and* $\langle f\rangle_{Q,\infty} := \|f\|_{L^\infty(Q)}$.

通常の dyadic cubes $\mathscr{D}^0$ は, 任意の $\eta \in (0,1)$ に対して η-sparse である. また、$m > 1$ に対して $m\mathscr{D}_0 := \{mQ\}_{Q\in\mathscr{D}_0}$ も, 全ての η に対して η-sparse である.

この論文では, Bochner-Riesz operator

$$m_\delta(D)f(x) := \mathscr{F}^{-1}[m_\delta \hat{f}](x),$$

where $m_\delta(\xi) := (1-|\xi|^2)_+^\delta$, $a_+ := \max(a,0)$ and $\delta > 0$ に対して

$$|\langle m_\delta(D)f, g\rangle| \lesssim \Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g)$$

という評価を $f, g \in L^\infty$ with compact supports に対して論じている.

2 Fundamental facts for sparse bounds

次の *universal sparse family* の存在は, 様々な作用素の評価に対して有益と思われるので, ここで証明する.

Theorem 2.1 ([6])**.** *Let $r, s \in [1,\infty]$ and $\eta \in (0,1)$. There exist η-sparse families $\mathcal{S}^\alpha \subset \mathscr{D}^\alpha$, $(\alpha \in \{0,1,2\}^n)$, such that for any $\eta_0 \in (0,1)$ and η_0-sparse family $\mathcal{S}_0$, it holds*

$$\Lambda_{\mathcal{S}_0;r,s}(f,g) \lesssim (1-\eta)^{-(1/r+1/s)}\eta_0^{-1}\sum_\alpha \Lambda_{\mathcal{S}^\alpha;r,s}(f,g).$$

Proof. 簡単のため、$X(Q) := \langle f\rangle_{Q,r}\langle g\rangle_{Q,s}$ とする.

$$\sigma \geq \left(n+1+\log_2 \frac{1}{1-\eta}\right)(1/r+1/s)$$

とする.

α を固定し、$k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$S_k^\alpha := \{Q \in \mathscr{D}^\alpha; 2^{\sigma k} \leq X(Q) \text{ \& maximal w.r.t. inclusions}\}.$$

<u>**Claim 1**</u>: $Q \in S_k^\alpha \Rightarrow 2^{\sigma k} \leq X(Q) < 2^{\sigma k + n(1/r+1/s)}$.
これは, Hölder inequality から出る.

<u>**Claim 2**</u>: For each α and k, S_k^α is pairwise disjoint.
これも, 極大性から確認できる.

<u>**Claim 3**</u>: $Q \in S_k^\alpha,\ R \in S_\ell^\alpha$ with $k < \ell \Rightarrow Q \cap R = \varnothing$ or $R \subsetneq Q$.
$2^{\sigma k} < 2^{\sigma \ell} \leq X(R)$ より, $Q \subset R$ とはなりえない.

$Q \in S_k^\alpha$ に対して,

$$\begin{aligned} C(Q) &:= \{P \in S_{k+1}^\alpha; P \subsetneq Q\} \\ C_f(Q) &:= \{P \in C(Q); \langle f\rangle_{P.r} > a\langle f\rangle_{Q,r}\} \\ C_g(Q) &:= \{P \in C(Q); \langle g\rangle_{P.s} > b\langle g\rangle_{Q,s}\} \end{aligned}$$

where $a = \left(\frac{2}{1-\eta}\right)^{1/r}$ and $b = \left(\frac{2}{1-\eta}\right)^{1/s}$ と置く.

<u>**Claim 4**</u>: $Q \in S_k^\alpha \Rightarrow C(Q) = C_f(Q) \cup C_g(Q)$.
$\supset$ は明らか. $P \in C(Q)$ を取り, $P \notin C_f(Q) \cup C_g(Q)$ と仮定すると, $\frac{2^{\sigma(k+1)}}{ab} < X(Q)$ であるから, もし $2^{\sigma k + n(1/r+1/s)} \leq \frac{2^{\sigma(k+1)}}{ab}$ であれば, **Claim 1** から $Q \in S_k^\alpha$ に矛盾となるが, この不等式は, σ の条件と同値である.

$Q \in S_k^\alpha$ に対して, $E_Q := Q \setminus \bigcup_{P \in C(Q)} P$ とおく.

<u>**Claim 5**</u>: $|E_Q| \geq \eta|Q|$.
$P \in C_f(Q)$ であれば, $|P| < a^{-r}|Q|\frac{\|f\|_{L^r(P)}^r}{\|f\|_{L^r(Q)}^r}$ であるから, **Claim 2** を考慮すると

$$|E_Q| \geq |Q| - \sum_{P \in C_f(Q)} |P| - \sum_{P \in C_g(Q)} |P| \geq (1 - a^{-r} - b^{-s})|Q| = \eta|Q|$$

<u>**Claim 6**</u>: $S^\alpha := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S_k^\alpha \Rightarrow \{E_Q\}_{Q \in S^\alpha}$: disjoint.
$Q \in S_k^\alpha,\ R \in S_\ell^\alpha$ with $k < \ell$ and $Q \cap R \neq \varnothing$ とする. つまり, **Claim 3** より $R \subsetneq Q$. 場合分けして考える.
・$k = \ell$ の場合は, **Claim 2** より成立する.
・$k < \ell$ の場合は, $E_Q \cap R =$ を示せば十分であるから, それと同値な $R \subset \bigcup_{P \in C(Q)} P$ を示す. $\ell = k+1$ のときは, $R \in S_\ell^\alpha = S_{k+1}^\alpha$ で $R \subsetneq Q$ より $R \in C(Q) \subset \bigcup_{P \in C(Q)} P$ となりわかる. $\ell \geq k+2$ のときは, $2^{\sigma(k+1)} < 2^{\sigma \ell} \leq X(R)$. よって, S_{k+1}^α の定義から, ある $\tilde{R} \in S_{k+1}^\alpha$ で $R \subset \tilde{R}$ となるものがある. $Q \cap \tilde{R} \neq \varnothing$ かつ $k < \ell$ から, $\tilde{R} \subsetneq Q$ つまり, $\tilde{R} \in C(Q)$ が得られ, **Claim 6** の証明が完了する.
以上で、$S^\alpha \subset \mathscr{D}^\alpha$ が η-sparse family であることが分かった.

後は, 不等式を示せばよい. Lemma 1.1 から, $Q_0 \in \mathcal{S}_0$ に対して, $\tilde{Q}_0 \in \bigcup_{\alpha \in \{0,1,2\}^n} \mathscr{D}^\alpha$ such that $Q_0 \subset \tilde{Q}_0$ with $3\ell(Q_0) \le \ell(\tilde{Q}_0) \le 6\ell(Q_0)$ となるものがあって

$$\begin{aligned} X(Q_0) \ne 0 &\Rightarrow X(\tilde{Q}_0) \ne 0 \Rightarrow 2^{\sigma k} \le X(\tilde{Q}_0) < 2^{\sigma(k+1)} \text{ for some } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow^{\exists}\, Q_0^* \in S_k^\alpha \text{ s.t. } Q_0 \subset \tilde{Q}_0 \subset Q_0^*. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} X(Q_0) &\le \left(\frac{|\tilde{Q}_0|}{|Q_0|} \right)^{1/r+1/s} X(\tilde{Q}_0) \\ &< 6^{n(1/r+1/s)} 2^{\sigma(k+1)} \\ &\le 6^{n(1/r+1/s)} 2^{\sigma} X(Q_0^*) \\ &\lesssim (1-\eta)^{-(1/r+1/s)} X(Q_0^*) \end{aligned}$$

を得る. これを用いると, 目標の不等式が示される:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{S}_0;r,s}(f,g) &= \sum_{\substack{Q_0 \in \mathcal{S}_0 \\ X(Q_0) \ne 0}} |Q_0| X(Q_0) \\ &\le \sum_{\alpha} \sum_{Q \in S^\alpha} \sum_{\substack{Q_0 \in \mathcal{S}_0 \\ X(Q_0) \ne 0 \\ Q_0^* = Q}} |Q_0| X(Q_0) \\ &\lesssim (1-\eta)^{-(1/r+1/s)} \eta_0^{-1} \sum_{\alpha} \sum_{Q \in S^\alpha} X(Q) \sum_{\substack{Q_0 \in \mathcal{S}_0 \\ X(Q_0) \ne 0 \\ Q_0^* = Q}} |E_{Q_0}| \\ &\le (1-\eta)^{-(1/r+1/s)} \eta_0^{-1} \sum_{\alpha} \sum_{Q \in S^\alpha} |Q| X(Q) \\ &\le (1-\eta)^{-(1/r+1/s)} \eta_0^{-1} \sum_{\alpha} \Lambda_{\mathcal{S}^\alpha;r,s}(f,g). \end{aligned}$$

□

次に, 変形した sparse form を導入し, 通常のものとの同値性を示す. $r < \infty$ と $N \gg 1$ に対して,

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{Q,r} := |Q|^{-1/r} \| f M_{N^{-1}}(\chi_Q) \|_{L^r},$$

また, $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{Q,\infty} := \|f\|_{L^\infty(Q)}$, where $M_m f(x) := \sup_Q \langle f \rangle_{Q,m} \chi_Q(x)$ と定める. ここで,

$$M_r(\chi_Q)(x) \approx \left(\frac{1}{1 + \dfrac{|x - c(Q)|}{\ell(Q)}} \right)^{n/r}$$

に注意しておく. これを用いて,

$$\Lambda'_{\mathcal{S};r,s}(f,g) := \sum_{Q \in \mathcal{S}} |Q| \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{Q,r} \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{Q,s}$$

と定める. $\Lambda_{S;r,s}$ と $\Lambda'_{\mathcal{S};r,s}$ の同値性は, Culiuc, Kesler and Lacey [3] により以下のように示されている.

Lemma 2.1 ([3])**.** *Let $1 \le r, s \le \infty$, $\eta \in (0,1)$ and $f, g \in L_0^\infty$. There exists η-sparse family $\mathcal{S}$ such that for any $\eta' \in (0,1)$ and η'-sparse family $\mathcal{S}'$, it holds*

$$\Lambda'_{\mathcal{S}';r,s}(f,g) \lesssim \frac{1}{\eta'(1-\eta)^{1/r+1/s}} \Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g).$$

Proof. 任意の cube Q に対して, 以下のように書く:

$$X(Q) := \langle f\rangle_{Q,r}\langle g\rangle_{Q,s} \quad \text{and} \quad X'(Q) := \langle\!\langle f\rangle\!\rangle_{Q,r}\langle\!\langle g\rangle\!\rangle_{Q,s}.$$

次は簡単にわかる:

$$\langle\!\langle f\rangle\!\rangle_{Q,r} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jN}\|f\|_{L^r(2^jQ)}.$$

これを使って次がわかる:

$$X'(Q) \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jN} X(2^jQ).$$

実際, N は適当に取り直すこととして,

$$\begin{aligned}
X'(Q) &\lesssim |Q|^{-(1/r+1/s)} \sum_{j,k=0}^{\infty} 2^{-(j+k)N}\|f\|_{L^r(2^jQ)}\|g\|_{L^s(2^jQ)} \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jN}\langle f\rangle_{2^jQ,r}\sum_{k=0}^{j}2^{-kN}\langle g\rangle_{2^kQ,s} + \sum_{k=0}^{\infty}2^{-kN}\langle g\rangle_{2^kQ,s}\sum_{j=0}^{k}2^{-jN}\langle f\rangle_{2^jQ,r} \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jN}X(2^jQ).
\end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\mathcal{S}';r,s}(f,g) &\lesssim \sum_{Q'\in\mathcal{S}'}|Q'|\sum_{j=0}^{\infty}2^{-jN}X(2^jQ') \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}2^{-jN}\Lambda_{\mathcal{S}'_j;r,s}(f,g).
\end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{S}'_j := \{2^jQ'\}_{Q'\in\mathcal{S}'}$ は, $E_{2^jQ'} := E_{Q'}$ が $|E_{2^jQ'}| = |E_{Q'}| \geq \eta'|Q'| = 2^{-jn}\eta'|2^jQ'|$ なので, $2^{-jn}\eta'$-sparse である. Theorem 2.1 を使って,

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\mathcal{S}';r,s}(f,g) &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}2^{-jN}\frac{2^jn}{\eta'(1-\eta)^{1/r+1/s}}\sum_{\alpha\in\{0,1,2\}^n}\Lambda_{\mathcal{S}^\alpha;r,s}(f,g) \\
&\lesssim \frac{1}{\eta'(1-\eta)^{1/r+1/s}}\sum_{\alpha\in\{0,1,2\}^n}\Lambda_{\mathcal{S}^\alpha;r,s}(f,g) \\
&\leq \frac{1}{\eta'(1-\eta)^{1/r+1/s}}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g),
\end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{S}$ は $\{\mathcal{S}^\alpha\}_{\alpha\in\{0,1,2\}^n}$ の内のひとつ. □

3 Sparse bounds for Bochner-Reisz means

以下ではずっと, $n \geq 2$ かつ $\delta > 0$ とする.

3.1 Kernel estimates

$a \in \mathbb{R}$ に対して, $a_+ := \max(a,0)$ とする. 次の Bochner-Riesz operator を考える:

$$m_\delta(D)f(x) := \mathscr{F}^{-1}[m_\delta\hat{f}](x), \text{ where } m_\delta(\xi) := (1-|\xi|^2)_+^\delta.$$

$\hat{m_\delta}$ は, Bessel 函数

$$J_m(t) := c\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}e^{-im\theta}d\theta, \ (m\in\mathbb{Z}, \ t>0)$$

を使って,

$$\hat{m_\delta}(x) = c\frac{J_{n/2+\delta}(|x|)}{|x|^{n/2+\delta}}$$

と表わされる. 次の Bessel 函数の性質を使う.

Lemma 3.1. (1)

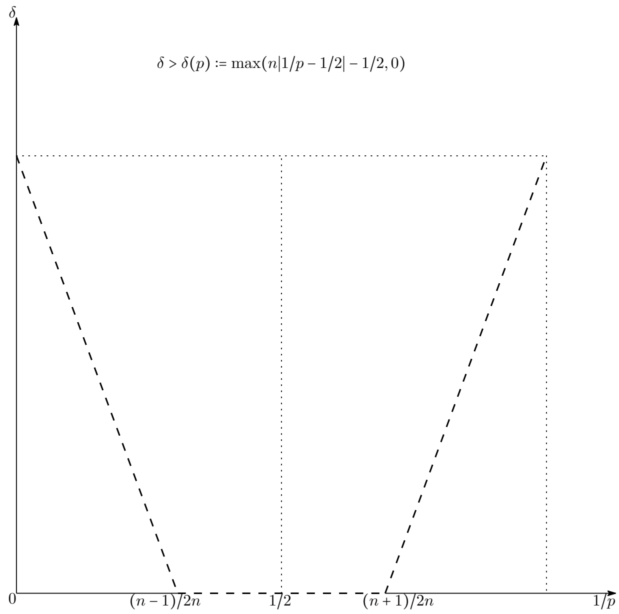
$$|J_m(t)| \lesssim \begin{cases} t^m & (t \le 1) \\ t^{-1/2} & (t > 1) \end{cases}$$

(2) $J_m(t) = e^{it}a_+(t) + e^{-it}a_-(t)$ *where* $a_\pm \in C^\infty((0,\infty))$ *with*

$$\left|\frac{d^\ell}{dt^\ell}a_\pm(t)\right| \lesssim \langle t\rangle^{-1/2-\ell}.$$

この (1) より, $\delta > (n-1)/2$ であれば, $|\hat{m}_\delta(x)| \lesssim \langle x\rangle^{-((n+1)/2+\delta)} \in L^1$ であるから, $m_\delta(D) \in \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathscr{L}(L^p)$ であることがわかる. $m_\delta(D)$ の有界性は次のように予想されている.

Conjecture 1. $p \in (1,\infty)$ かつ $\delta > \delta(p) := \max\left(n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}, 0\right)$ であれば, $m_\delta(D) \in \mathscr{L}(L^p)$.



$\delta(p)$ の最良性は Herz [4] で示されている. また, この予想は $n=2$ のとき, Carleson-Sjölin [1] により示されている. $n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 0 \iff p = \frac{2n}{n-1},\ \frac{2n}{n+1}$ であり, どちらかでの L^p-有界性が証明できれば, duality と補間でこの予想が証明される.

To analyze the operator, we take cut-off functions $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ with $\mathrm{supp}\psi \subset [-/2, 1/2]$ and $\mathrm{supp}\varphi \subset [1/8, 5/8]$ satisfying $\psi(t) + \sum_{j=0}^\infty \varphi(2^j(1-t)) = 1$ for all $t \in [0,1)$. この分解を用いて,

$$\begin{aligned} m_\delta(\xi) &= \psi(|\xi|)(1-|\xi|^2)^\delta + \sum_{j=0}^\infty 2^{-j\delta}\left[(2^j(1-|\xi|))^\delta \varphi(2^j(1-|\xi|))(1+|\xi|)^\delta\right] \\ &= \tilde{\psi}(|\xi|) + \sum_{j=0}^\infty 2^{-j\delta}\tilde{\varphi}(2^j(1-|\xi|))\rho(\xi), \end{aligned}$$

where $\tilde{\psi}(t) := \psi(t)(1-t^2)^\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tilde{\varphi}(t) = t^\delta\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ and ρ is a function in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supported on $\{|\xi| \approx 1\}$, と分解する. $\tilde{\psi}(|D|)$, $\rho(D) \in \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathscr{L}(L^p)$ がわかるから, $\tilde{\varphi}(D)$ の解析をすればよい. また, 同様に $|\tilde{\varphi}(2^j(1-|D|))f| \lesssim c(j)Mf$ であるから, 十分大きな $j \in \mathbb{N}$ に対して考えればよい.

改めて, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ with $\mathrm{supp}\varphi \subset [-1,1]$ と $0 < \tau \ll 1$ に対して

$$S_\tau(D)f(x) := \mathscr{F}^{-1}\left[\varphi\left(\frac{1-|\xi|}{\tau}\right)\hat{f}\right](x)$$

とし, τ に関する growth estimate を考える.

Conjecture 2. $p \in [1,\infty]$ に対して, $\|S_\tau(D)\|_{L^p\to L^p} \lesssim \tau^{-\delta(p)}$.

Conjecture 2 から Conjecture 1 が出るのは明らかである. また, 当然 $\|S_\tau(D)\|_{L^2\to L^2} \lesssim 1 = \tau^{-\delta(2)}$ も明らか. 例えば $n=2$ のとき, Córdoba [2] により, second dyadic decomposition, ℓ^2-decoupling や Kakeya maximal function の有界性を用いて,

$$\|S_\tau(D)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)\to L^4(\mathbb{R}^2)} \lesssim \log(1/\tau)^{1/4} \lesssim \tau^{-\varepsilon}$$

が示されている. 一般次元での予想は次である

Conjecture 3. $p = 2n/(n-1)$ *or* $2n/(n+1)$ で $\|S_\tau(D)\|_{L^p\to L^p} \lesssim \tau^{-\varepsilon}$.

$S_\tau(D)f(x) = f * K_\tau(x)$ とし, 積分核 $K_\tau(x) = \int e^{ix\xi}\varphi\left(\frac{1-|\xi|}{\tau}\right)d\xi$ は以下の各点評価を持つ.

Lemma 3.2.

$$|K_\tau(x)| \lesssim \begin{cases} \tau \\ \tau|x|^{-(n-1)/2}\langle\tau x\rangle^{-N} \end{cases}$$

for any $N \geq 0$.

Proof. 1 つ目は,

$$|K_\tau(x)| \lesssim |\{1-\tau \leq |\xi| \leq 1+\tau\}| \lesssim \tau.$$

次に,

$$\begin{aligned}
|K_\tau(x)| &= \int_0^\infty r^{n-1}\varphi\left(\frac{1-|r|}{\tau}\right)\hat{d\sigma}(-rx)dr \\
&= c\int_0^\infty r^{n-1}\varphi\left(\frac{1-|r|}{\tau}\right)\frac{J_{(n-2)/2}(r|x|)}{(r|x|)^{(n-2)/2}}dr \\
&= c\int_0^\infty r^{n-1}\varphi\left(\frac{1-|r|}{\tau}\right)\frac{e^{ir|x|}}{(r|x|)^{n/2}}a_+(r|x|)dr + \int_0^\infty r^{n-1}\varphi\left(\frac{1-|r|}{\tau}\right)\frac{e^{-ir|x|}}{(r|x|)^{n/2}}a_-(r|x|)dr \\
&= c|x|^{-(n-1)/2}(I_\tau^+(x) + I_\tau^-(x)),
\end{aligned}$$

where $a_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ with $\left|\frac{d^m}{dr^m}a_\pm(r)\right| \lesssim \langle r\rangle^{-m}$, and

$$I_\tau^\pm(x) = \int_0^\infty e^{\pm ir|x|}r^{(n+1)/2}\varphi\left(\frac{1-|r|}{\tau}\right)a_\pm(r|x|)dr.$$

部分積分から $|I_\tau^\pm(x)| \lesssim \tau\langle\tau x\rangle^{-N}$ for any $N \geq 0$ が得られるので, 主張が得られる. □

これの簡単な系として,

$$\|K_\tau\|_{L^1} \lesssim \tau\int_{\{|x|\leq\tau^{-1}\}}|x|^{-(n-1)/2}dx + \tau^{1-N}\int_{\{|x|\geq\tau^{-1}\}}|x|^{-((n-1)/2+N)}dx \lesssim \tau^{-(n-1)/2} \tag{1}$$

を得る. つまり, 全ての $p \in [1,\infty]$ に対して, $\|S_\tau(D)\|_{L^p\to L^p} \lesssim \tau^{-(n-1)/2}$. 特に, $m_\delta(D) \in \mathscr{L}(L^1)$ if $\delta > \delta(1) = (n-1)/2$. これは, Conjecture 2 の $p=1$ の場合に対応する.

3.2 Sparse bounds

以下の proposition の (1)-(3) は論文にあるままですが, (4)-(6) は付け加えました. (4) は, 単なる補間をしたものです. (5) は, Bernstein の不等式を用いて出るものです. (6) は, 補間と Bernstein の不等式を使っているだけです.

Proposition 3.1. *For* $f,g \in L_0^\infty$, $0<\tau\ll 1$ *and* $\eta\in(0,1)$ *に対して, 次の* (1) – (6) *を満たすような* η*-sparse family* $\mathcal{S}$ *が存在する.*

(1) $|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)/2}\Lambda_{\mathcal{S};1,1}(f,g)$.

(2) $|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)/2}\min(\Lambda_{\mathcal{S};1,\infty}(f,g),\ \Lambda_{\mathcal{S};\infty,1}(f,g))$.

(3) *If there is* $p\in(1,2)$, *for which it holds* $\|S_\tau(D)\|_{L^p\to L^p}\lesssim_\varepsilon \tau^{-\varepsilon}$ *for all* $\varepsilon>0$, *then*

$$|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};p,p'}(f,g)$$

for all $\varepsilon>0$.

(4) *If there is* $p\in(1,2)$, *for which it holds* $\|S_\tau(D)\|_{L^p\to L^{p,\infty}}\lesssim_\varepsilon \tau^{-\varepsilon}$ *for all* $\varepsilon>0$, *then*

$$|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)(1-\theta)/2-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};q,q'}(f,g)$$

for all $\varepsilon>0$, *where* $q\in(1,p)$ *defined by* $1/q=(1-\theta)+\theta/p$, (i.e. $\theta=p'/q$).

(5) *With the same assumption as* (4), *it holds*

$$|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)\left(1/r-1/s'-(1-\theta)/2\right)-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g),$$

provided that $r\in[1,p)\cup(p',\infty]$ *and* $s\in[1,r']$, *and* $\theta=p'/r'$.

(6) *With the same assumption as* (4), *it holds*

$$|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)\left(1/r-1/s'\right)-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g),$$

provided that $r\in(p,p')$ *and* $s\in[1,r']$.

Remark 3.1. (5) と (6) は, $r=p$ *or* p' の時でも, 仮定を *weak type* の評価から (3) の *strong type* にすると成立する.

Proof. $\alpha\ge 1$ とする. Cube Q を $\mathrm{supp} f\cup \mathrm{supp} g\subset Q$ かつ $\tau^{-\alpha}\le 100\ell(Q)$ となるものとする. Q を 2 進分解を繰り返し, 辺の長さが $\tau^{-\alpha}$ となるようにする;

$$Q=\bigcup_{j=1}^{2^{nM}} Q_j \quad \text{with } \ell(Q_j)\approx\tau^{-\alpha}.$$

ここで, $M=M(Q,\tau,\alpha)\in\mathbb{N}$. 簡単のため, $f=\sum_{j=1}^{2^{nM}} f\chi_{Q_j}=\sum_j f_j$ とし, g の方も同様とする. これを用いて,

$$\begin{aligned}|\langle S_\tau(D)f,g\rangle| &\le \sum_k \sum_{\substack{j\\ Q_j\subset 3Q_k}} \iint |f_j(y)g_k(x)K_\tau(x-y)|dxdy\\ &+\sum_k \sum_{\substack{j\\ Q_j\not\subset 3Q_k}} \iint |f_j(y)g_k(x)K_\tau(x-y)|dxdy =: I+II.\end{aligned}$$

II は統一的に扱える. <u>**Claim**</u>: $|II|\lesssim \tau^{1-\alpha(n+1)/2+N(\alpha-1)}\Lambda_{S;1,1}(f,g)$ for a large $N>0$.

(1) と (2) では $\alpha=1$ で使い, (3) と (4) では $0<\alpha-1\ll 1$ かつ $N\gg 1$ で使う.

まず, $x\in Q_k$, $y\in Q_j$ with $Q_j\not\subset 3Q_k$ に対して,

$$|x-y|\approx \mathrm{dist}(x,Q_j)\approx \mathrm{dist}(y,Q_k)\approx \mathrm{dist}(Q_j,Q_k)$$

となることに注意する. 今, $\sigma\in\mathbb{N}$ に対して,

$$L_\sigma := \{Q_j; Q_j\not\subset (2(\sigma-1)+1)Q_k \ \&\ Q_j\subset(2\sigma+1)Q_k\}$$

とすると, $\sharp L_\sigma \lesssim \sigma^n$ となる. 以上を使って,

$$\begin{aligned}
|II| &= \sum_{k=1}^{2^{nM}} \sum_{\substack{j \\ Q_j \notin 3Q_k}} \iint |f_j(y) g_k(x) K_\tau(x-y)| dxdy \\
&\lesssim \tau^{1-N} \sum_k \sum_{\sigma=2}^{2^M} \sum_{Q_j \in L_\sigma} \int_{Q_j} |f(y)| \int_{Q_k} |g(x)||x-y|^{-((n-1)/2+N)} dxdy \\
&\lesssim \tau^{1-N} \sum_k \sum_\sigma (\sigma\tau^{-\alpha})^{-((n-1)/2+N/3)} \sum_{Q_j \in L_\sigma} \int_{Q_j} |f(y)| \left(\frac{1}{dist(y,Q_k)} \right)^{N/3} dy \\
&\qquad \times \int_{Q_k} |g(x)| \left(\frac{1}{dist(x,Q_j)} \right)^{N/3} dy \\
&\lesssim \tau^{1-N+\alpha(n-1)/2+\alpha N/3} \sum_k \sum_\sigma \sigma^{-((n-1)/2+N/3))} \sum_{Q \in L_\sigma} \ell(Q_j)^{-N/3} \ell(Q_k)^{-N/3} \\
&\quad \times \int_{Q_j} |f(y)| \left(\frac{1}{1 + \dfrac{dist(y,Q_k)}{|Q_k|}} \right)^{N/3} dy \int_{Q_k} |g(x)| \left(\frac{1}{1 + \dfrac{dist(x,Q_j)}{|Q_j|}} \right)^{N/3} dx \\
&\lesssim \tau^{1-N+\alpha(n-1)/2+\alpha N - \alpha n} \sum_k \sum_\sigma \sigma^{-((n-1)/2+N/3)} \sum_{Q_j \in L_\sigma} |Q_k| \\
&\quad \times \left(\frac{1}{|Q_k|} \int |f(y)| M_{3n/N}(\chi_{Q_k}) dy \right) \left(\frac{1}{|Q_k|} \int |g(x)| M_{3n/N}(\chi_{Q_k}) dx \right)
\end{aligned}$$

ここで, $M_{3n/N}(\chi_{Q_j}) \lesssim M_{3n/N}(\chi_{Q_k})$ on Q_k を使った. $\sharp L_\sigma \lesssim \sigma^n$ を使い, $N>0$ を大きくすると

$$|II| \lesssim \tau^{(1-\alpha(n+1)/2)+N(\alpha-1)} \Lambda'_{\mathcal{S};1,1}(f,g),$$

where $\mathcal{S} := \{Q_j\}_{j=1}^{2^{nM}}$ は, 全ての $\eta \in (0,1)$ に対して η-sparse family. これで, **Claim** の証明が完了.

<u>(1) の証明:</u>

$$\begin{aligned}
|I| &= \sum_{k=1}^{2^{nM}} \sum_{\substack{j \\ Q_j \subset 3Q_k}} \int |f(y)| \int_{Q_k} |g(x)||K_\tau(x-y)| dxdy \\
&= \int |f(y)| \int |g(x)||K_\tau(x)| \psi(x-y) dxdy,
\end{aligned}$$

where $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ with supp$\psi \subset \{x; |x| \lesssim \tau^{-\alpha}\}$. 2 進分解と Lemma 3.2 から,

$$|K_\tau(x)\psi(x)| \lesssim \tau \sum_{k=0}^{L} 2^{-(n-1)k/2} \chi_k(x)$$

where $2^L \approx \tau^{-\alpha}$, $\chi_0 := \chi_{B(0,1)}$ and $\chi_k := \chi_{\{|x| \approx 2^k\}}$ for $k \geq 1$.

次に, 各 $k \in \{0,1,\cdots,L\}$ に対して, $Q = \bigcup_{j=1}^{2^n M} Q_j$ with $\ell(Q_j) \approx 2^k$ と分解する. ここで, $M = M(k)$. 従って,

$$\begin{aligned}
|I| &\lesssim \tau \sum_{k=0}^{L} 2^{-(n-1)k/2} \int |f(y)| \int |g(x)| \chi_k(x-y) dxdy \\
&\lesssim \tau \sum_{k=0}^{L} 2^{-(n-1)k/2} \sum_{j=1}^{2^{nM}} \int_{Q_j} |f(y)| \int_{B(y,2^k)} |g(x)| dxdy \\
&\lesssim \tau \sum_{k=0}^{L} 2^{(n+1)k/2} \sum_{j=1}^{2^{nM}} |3Q_j| \langle f \rangle_{3Q_j,1} \langle g \rangle_{3Q_j,1}, \ (B(y,2^k) \subset 3Q_j) \\
&\lesssim \tau^{1-\alpha(n+1)/2} \Lambda_{\mathcal{S};1,1}(f,g),
\end{aligned}$$

where $\mathcal{S} := \{3Q_k\}_{k=0}^{L}$ is η-sparse family for all $\eta \in (0,1)$ with $E_{3Q_k} := Q_k$. ($2^L \approx \tau^{-\alpha}$ i.e. $L \approx \alpha \log(1/\tau^{-1})$). よって, II の評価と合わせて, Theorem 2.1 と Lemma 2.1 を用いると, ある η-sparse family $\mathcal{S}_*$ があって,

$$|\langle S_\tau(D)f, g\rangle| \lesssim \tau^{1-\alpha(n+1)/2}\left(1 + \tau^{(N(\alpha-1)}\right)\Lambda_{\mathcal{S}_*;1,1}(f,g).$$

$\alpha = 1$ を適応すると, (1) の証明が完了する.

(2) の証明: $\langle f\rangle_{Q,1} \le \langle f\rangle_{Q,\infty}$ であるから, (1) より直ちに得られる.

(3) の証明: 仮定から I は以下のように評価できる;

$$\begin{aligned} |I| &\le \sum_{k=1}^{2^{nM}} \sum_{\substack{j \\ Q_j \subset 3Q_k}} \|S_\tau(D)f_j\|_{L^p(Q_k)}\|g\|_{L^{p'}(Q_k)} \\ &\lesssim \tau^{-\varepsilon}\sum_k \sum_{\substack{j \\ Q_j \subset 3Q_k}} \|f\|_{L^p(Q_j)}\|g\|_{L^{p'}(Q_k)} \\ &\lesssim \tau^{-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};p,p'}(f,g), \end{aligned}$$

where $\mathcal{S} := \{3Q_k\}_k$, with $E_{3Q_k} := Q_k$. II の評価で, $\alpha > 1$ かつ $N \gg 1$ とすると, 主張を得る.

(4) の証明: (1) と 仮定より, $\|S_\tau(D)\|_{L^q \to L^q} \lesssim \tau^{(1-\alpha(n+1)/2)(1-\theta)-\varepsilon}$ が得られるので, (3) と同様にして

$$|I| \lesssim \tau^{(1-\alpha(n+1)/2)(1-\theta)-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};q,q'}(f,g).$$

これと II の評価で $\alpha > 1$ かつ $N \gg 1$ を適応したものを合わせると, 主張が得られる.

(5) の証明: The Fourier support of $S_\tau(D)f$ is contained in $A_\tau := \{1-\tau \le |\xi| \le 1+\tau\}$ and $|A_\tau| \approx \tau$. We remark that $\|S_\tau(D)\|_{L^r \to L^r} \lesssim \tau^{(1-\alpha(n+1)/2)(1-\theta)-\varepsilon}$ from interpolation. Note that $1/r = 1-\theta+\theta/p$. Hence, applying Bernstein inequality, we have

$$\begin{aligned} |I| &\le \sum_{k=1}^{2^{nM}} \sum_{\substack{j \\ Q_j \subset 3Q_k}} \|S_\tau(D)f_j\|_{L^{s'}}\|g_k\|_{L^s} \\ &\lesssim \tau^{1/r-1/s'}\tau^{(1-\alpha(n+1)/2)(1-\theta)-\varepsilon}\sum_k\sum_j \|f_j\|_{L^r}\|g_k\|_{L^s} \\ &\lesssim \tau^{-(n-1)(1/r-1/s')+(1-\alpha(n+1)/2)(1-\theta)-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g), \end{aligned}$$

where $\mathcal{S} := \{3Q_k\}_{k=1}^{2^{nM}}$. 後は, $\alpha = 1$ として II と合わせて

$$|\langle S_\tau(D)f, g\rangle| \lesssim \tau^{-(n-1)(1/r-1/s'+(1-\theta)/2)-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g),$$

with an η-sparse family $\mathcal{S}$.

(6) の証明: In this case, we have $\|S_\tau(D)\|_{L^r \to L^r} \lesssim \tau^{-\varepsilon}$. Therefore, similarly as (5), one can obtain

$$|I| \lesssim \tau^{-(n-1)(1/r-1/s')-\varepsilon}\Lambda_{\mathcal{S};r,s}(f,g)$$

with the same $\mathcal{S}$ as that of (5). □

4 L^p-bounds for Bochner-Riesz means deduced from the sparse bounds

ここでは, Section 3 で得た sparse bounds を用いて得られる L^p-有界性の p の範囲を考察する. ただし, Section 3 で得た sparse bounds は $\|S_\tau(D)\|_{L^p} \lesssim \tau^{-\varepsilon}$ を仮定して得られたものであることを注意しておく.

次の補間定理を用いる:

Proposition 4.1. $1 \le r_j, s_j \le \infty$ *for* $j = 0, 1$ とし, $\tau \in (0,\infty)$ とする. 線形作用素 T が *2* つの *sparse bound* を満たすと仮定する*:*

$$|\langle Tf, g\rangle| \le C_j \Lambda_{\mathcal{S}; r_j, s_j}(f,g),\ \ (j = 0, 1)$$

for all $f, g \in L^\infty_0$*.* ただし*,* η*-sparse family* $\mathcal{S}$ は有限集合とする*.* この時*,* $\theta \in (0,1)$ と $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ *&* $1/s = (1-\theta)/s_0 + \theta/s_1$ に対して*,*

$$|\langle Tf, g\rangle| \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \Lambda_{\mathcal{S}; r, s}(f,g).$$

私には証明を理解することができませんでした。具体的には, Online では実際の論文 (will be published from J. Fourier Anal. Appl.) が見れますが, それの 8 ページ目の一行目の不等式が理解できませんでした.

[7] では, 次の主定理 (論文内では, Theorem 2.3) は, proposition 3.1 の (1)-(3) に上の補間定理を用いて示している. 定理のために記号を用意する. Let $\theta := 2\delta/(n-1) \in (0,1)$.

$$\nu_1 := (1/p' + \theta/p, (1-\theta)/p),\ \ \nu_2 := (1/p' + \theta/p, 1/p + \theta/p'),\ \ \nu_3 := \bar{\nu_2} \text{ and } \nu_4 := \bar{\nu_1}$$

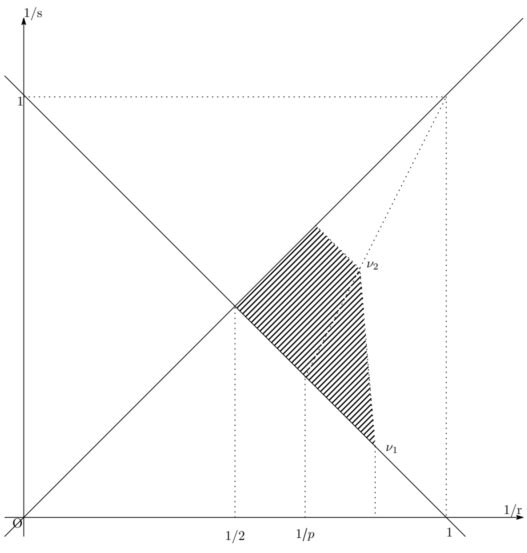
where $\overline{(a,b)} = (b,a)$, とし, これらでできる台形を $\mathbf{R}(n,p,\delta)$ とする. δ や p の値で, 下の図 (a) での ν_1 の位置が ν_4 になることがあります. 同様に, ν_2 が ν_3 になることがあります.

Theorem 4.1. *Let* $n \ge 2$*,* $\delta \in (0, (n-1)/2)$*,* $\eta \in (0,1)$ *and* $p \in (1,2)$*.* $\|S_\tau(D)\|_{L^p \to L^p} \lesssim \tau^{\varepsilon}$ であるとすると*,*

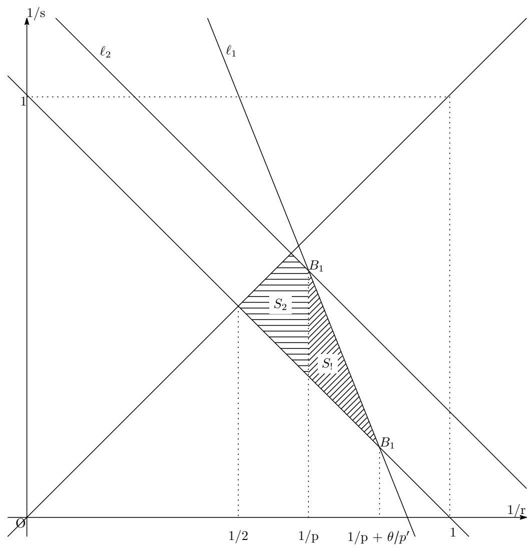
$$|\langle m_\delta(D) f, g\rangle| \lesssim \Lambda_{\mathcal{S}; r, s}(f,g), \tag{2}$$

for all $f, g \in L^\infty_0$*, with a* η*-sparse family, provided that* $(1/r, 1/s) \in \mathbf{R}(n,p,\delta)$*.* さらに*,* $(1/r, 1/s) \in \mathbf{R}(n,p,\delta) \cap \{1/r + 1/s > 1\}$ に対しては*,* 上の評価は不成立*.*

まだ使っていない Proposition 3.1 の (5)-(6) を用いて (2) が成り立つ $(1/r, 1/s)$ の範囲を作図すると以下の図 (b) となる. ここで, 図 (a),(b) 共に, 境界上のことは気にしないことにしている. 発表の時は時間の都合で話せませんでしたが, ν_1 と ν_2 の $1/r$ 座標は共に図 (b) にある $1/p + \theta/p'$ よりも真に小さいので, 図 (b) の B_1 は, 論文が主張する台形 $\mathbf{R}(n,p,\delta)$ の外に位置する. つまり, Theorem 4.1 の sharpness は間違いである. ただし, これは著者らの単なる type ミスであるかもしれない.



(a) Lacey-Mena-Reguera [7]



(b)

図 (b) の 2 つの直線は

$$\ell_1 : 1/s = -(1 + p'/2)/r + (p' + \theta + 1)/2$$
$$\ell_2 : 1/s = -1/r + 1 + \theta/2.$$

5 Sharpness of the sparse bounds for Bochner-Riesz measns

[7] では, $0 < \lambda, c \ll 1$ とし,

$$R := [-1/\lambda, 1/\lambda] \times [-c/\lambda, c/\lambda]^{n-1} \text{ and } \tilde{R} := R + (1/\lambda, 0, \cdots, 0)$$

と定め, $f := e^{i|x|}\chi_R,\ g := e^{-i|x|}\chi_{\tilde{R}}$ を用いて, sharpness の議論をしている. まず, 以下の様に分解する:

$$\begin{aligned}
|\langle m_\delta(D)f, g\rangle| &= c\int_R \int_{\tilde{R}} e^{-i|x|+i|y|} \frac{J_{n/2+\delta}(|x-y|)}{|x-y|^{n/2+\delta}} dxdy \\
&= c\int_R \int_{\tilde{R}} \frac{e^{i(|x-y|-|x|+|y|)}}{|x-y|^{(n+1)/2+\delta}} dxdy + c\int_R \int_{\tilde{R}} \frac{e^{i(-|x-y|-|x|+|y|)}}{|x-y|^{(n+1)/2+\delta}} dxdy + c\int_R \int_{\tilde{R}} e^{-i|x|+i|y|} \frac{R(x-y|)}{|x-y|^{n/2+\delta}} dxdy \\
&=: I + II * III,
\end{aligned}$$

ここで, $|R(t)| \lesssim t^{-3/2}$ for $|t| \gg 1$. [7] では, $x \in \tilde{R}$ and $y \in R$ であれば

$$\begin{cases} ||x-y| - |x| + |y|| \lesssim c \\ -|x-y| - |x| + |y| \approx -|x-y| \end{cases} \tag{3}$$

を主張しているがこれも共に偽である. 実際, 1 つ目は, x を $\tilde{R}$ の右端, y を R の右端とすると, $|x-y| - |x| + |y| = 2/\lambda \to \infty$ as $\lambda \searrow 0$. 2 つ目は, $x = 0$ かつ y を R の左端とすると, $-|x-y| - |x| + |y| = 0$ だが, $-|x-y| = -1/\lambda$.

(3) を正しいとして荒く見てみると, I では, 振動項は無視できるので, ある程度大きい. II では, (x と y が離れていれば,)stationary phase で, λ^N の項で評価できる. III では, 剰余項の評価から $\lambda^{-(n-1)/2+\delta}$ で評価できる. これらから, $|\langle m_\delta(D)f, g\rangle| \geq |I| - |II| - |III| \gtrsim \lambda^\alpha$ for some $\alpha > 0$, が得られる. [7] の (5.1) では, $|R| \approx \lambda^{-n/2}$ であることが使われているが, 定義から $|R| \approx c^{n-1}\lambda^{-(n+1)/2}$ である. (3) が成立するように, $R, \tilde{R}$ を訂正するのはいくつかやり方がありますが, また落ち着いて考え直おしてみます. 私の現在の理解はここまでです.

参考文献

[1] L. Carleson and P. Sjölin, *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc*, Studia Math., **44** (1972), 287-299.

[2] A. Córdoba, *A note on Bochner-Riesz operators*, Duke Math. J., **46** (1979) no.3, 505-511.

[3] A. Culiuc, R. Kesler and M.T. Lacey, *Sparse bounds for the discrete cubic Hilbert transform*, ArXiv.

[4] C.S. Herz, *On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **40**, (1954). 996-999.

[5] T. Hytönen, M.T. Lacey and C. Pérez, *Sharp weighted bounds for the q-variation of singular integrals*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 3, 529-540.

[6] M.T. Lacey and D. Mena, *The sparse T1 theorem*, to appear in Houston Math. J.

[7] M.T. Lacey, D. Mena and M.C. Reguera, *Sparse bounds for Bochner-Riesz multipliers*, to appear in J. Fourier Anal. Appl.