Notes on the paper ‘Sparse bounds for spherical maximal functions’ by Michael T. Lacey

宮地晶彦

2018 年 2 月 18 日，名古屋大学での勉強会

1 Introduction

表題の論文は arXiv:1702.08594v4 [math.CA] 8 May 2017 にある．

定義. 以下に出てくる f, g は $\mathbb{R}^n$ 上の非負の Borel 可測関数，cube は $\mathbb{R}^n$ の cube とする．
(1) $\mathbb{R}^n$ の単位球面 $\{|z|=1\}$ 上の $n-1$ 次元面積測度を σ として，

$$\begin{aligned} A_t f(x) &= \int_{|z|=1} f(x-tz)\, d\sigma(z), \quad 0<t<\infty, \\ M_{\mathrm{lac}} f(x) &= \sup_{j\in\mathbb{Z}} A_{2^j} f(x), \\ M_{\mathrm{full}} f(x) &= \sup_{0<t<\infty} A_t f(x) \end{aligned}$$

と定義する．$M_{\mathrm{lac}} f$ を *lacunary spherical maximal function*, $M_{\mathrm{full}} f$ を *full spherical maximal function* という．
(2) Cube Q と $1\le r<\infty$ に対して

$$\langle f\rangle_{Q,r} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)^r\, dx\right)^{1/r}.$$

(3) Cube の族 $\mathcal{S}$ が *sparse* であるとは，互いに素な可測集合の族 $\{E_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$ で各 $Q\in\mathcal{S}$ に対して $E_Q\subset Q$ かつ $|E_Q|>\frac{1}{2}|Q|$ となっているものがとれることである．
(4) $\mathcal{S}$ が cube の sparse family で $1\le r,\ s<\infty$ のとき，$\mathcal{S}$ に関する $(r,s)_{\mathrm{m}}$-*sparse form* とは，互いに素な可測集合の族 $\{F_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$ で各 $Q\in\mathcal{S}$ に対して $F_Q\subset Q$ なるものを用いて

$$\Lambda_{\mathcal{S},r,s,\mathrm{m}}(f,g) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|\langle f\rangle_{Q,r}\langle g\mathbf{1}_{F_Q}\rangle_{Q,s}$$

と表される式のことである．$|F_Q|$ に対して制限はおかない．また

$$\Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|\langle f\rangle_{Q,r}\langle g\rangle_{Q,s}$$

を sparse family $\mathcal{S}$ に関する (r,s)-*sparse form* と言う．

T が非負 Borel 可測関数を非負 Borel 可測関数にうつす作用素で $1\le r,\ s<\infty$ のとき，作用素 T が，もしくは form $\langle Tf,g\rangle=\int Tf(x)g(x)\,dx$ が，$(r,s)_{\mathrm{m}}$-sparse bound を持つと言うのは，すべての非負 Borel 可測関数 f, g に対して cube の sparse family $\mathcal{S}$ が存在して

$$\langle Tf,g\rangle \le C\Lambda_{\mathcal{S},r,s,\mathrm{m}}(f,g)$$

が成り立つことである．ここで C は f, g に依存しない定数であるが，sparse family $\mathcal{S}$ と $\Lambda_{\mathcal{S},r,s,\mathrm{m}}(f,g)$ の中の族 $\{F_Q\}$ は f, g に依存してよい．以下の定理では関数 f,g にコンパクト台で有界であるなどの制限を付ける．上の $\Lambda_{\mathcal{S},r,s,\mathrm{m}}(f,g)$ を $\Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g)$ で置き換えた評価は (r,s)-sparse bound と言う．

作用素 T が $1/r+1/s>1$ なる $1\le r,s<\infty$ について (r,s)-sparse bound を持てば，s' を s の共役指数（$1/s+1/s'$ で定まる指数）として，$r<p<s'$ の範囲の p に対して L^p 有界性 $\|Tf\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p}$ が成り立つ．さらに Muckenhoupt の A_p クラスと逆 Hölder クラスの言葉で記述される適当なクラスの重み w について重み付き有界性 $\|Tf\|_{L^p(w)}\le C_w\|f\|_{L^p(w)}$ が成り立つことも知られている (Bernicot-Frey-Petermichl, 表題論文の Theorem G, p. 18)．

表題の Lacey の論文は，M_{lac} と M_{full} が或る範囲の r, s に対して $(r,s)_{\mathrm{m}}$-sparse bound を持つことを示し，さらにその r, s の範囲が境界を除いて sharp な範囲であることも示している．

表題論文の定理から，sparse bound から重み付き不等式を導く一般論により，M_{lac} と M_{full} に対する重み付き不等式が得られる．その重み付き不等式は，A_p クラスの言葉で記述される或るクラスの重みを用いて Cowling–Garcia-Cuerva–Gunawan が与えていた評価を改善するものである．Lacey は，表題論文の sparse bound から導かれる M_{lac} と M_{full} の A_p クラスと逆 Hölder クラスの重みに関する重み付き不等式は，そのようなクラスでは sharp なものだと ‘suspect’ できると書いている (論文 p. 3, 下から 14–11 行) が，そのはっきりした主張や証明は与えていない．

べきの重み $w(x)=|x|^\alpha$ に関する M_{lac} と M_{full} の重み付き評価は Duoandikoetxea と Vega によって詳細に調べられている．Lacey の表題論文の sparse bound から導かれる結果は，べきの重みに対する Duoandikoetxea–Vega の結果のすべてはカバーできない，とのことである (論文 p. 17, Theorem E の直後)．

Lacey は，M_{lac} と M_{full} の重み付き評価においては A_p クラスの重みは適当なものではないと書いている (論文 p. 14 の下から 4–1 行，p. 17 の Theorem E の後のパラグラフ)．

表題の論文の定理の証明は，説明が簡潔にすぎるところがあるようなので，次の節で M_{lac} の $(r,s)_m$-sparse bound を与える定理 (Theorem 1.2, p. 2) の証明を，少し改変して詳しく書いてみる．M_{full} の $(r,s)_m$-sparse bound の証明も同じ方法でなされるが，それは本文を参照していただきたい．

2 M_{lac} の $(r,s)_m$-sparse bound の証明

2.1 定理と補題

定理 1 (Theorem 1.2, p. 2)**.** $n\ge 2$ で，座標平面の 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(n/(n+1),n/(n+1))$ を頂点とする閉三角形領域を L_n とし，$1<r$, $s<\infty$ かつ $(1/r,1/s)$ が L_n の内部にあると仮定する．このとき，コンパクト台をもつ非負の有界 Borel 可測関数 f, h に対して $\langle M_{\mathrm{lac}}\,f,h\rangle$ は $(r,s)_{\mathrm{m}}$-sparse bound を持つ，すなわち，任意のコンパクト台の非負の有界 Borel 可測関数 f, h に対して，cube の sparse family $\mathcal{S}$ と互いに素な可測集合族 $\{F_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$, $F_Q\subset Q$, が存在して

$$\langle M_{\mathrm{lac}}\,f,h\rangle\le C\sum_{Q\in\mathcal{S}}|Q|\langle f\rangle_{Q,r}\langle h\mathbf{1}_{F_Q}\rangle_{Q,s} \tag{1}$$

が成り立つ．C は n, r, s のみに依存する定数である．

証明には次の補題を用いる．

補題 1 (A_1 の L^p-improving property; Littman, Strichartz; Theorem C, p. 4)**.** $n\ge 2$ で L_n を定理 1 の閉三角形領域とし，

$$L_n'=\{(1/p,1/q)\mid(1/p,1/q')\in L_n\}$$

とすると，$1 \le p,\, q \le \infty$ かつ $(1/p, 1/q) \in L'_n$ なる (p,q) に対して $\|A_1\|_{L^p \to L^q} < \infty$.

補題 2 (A_1 の continuity property; Theorem 2.1, p. 4)**.** $n \ge 2$ で，$(1/p, 1/q)$ が補題 1 の L'_n の内部にあるような $1 < p,\, q < \infty$ に対して，定数 $\eta = \eta(n,p,q) > 0$ があって

$$\|A_1 - \tau_y A_1\|_{L^p \to L^q} \lesssim |y|^\eta, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

ただし τ_y は $\tau_y f(x) = f(x-y)$ で定義される平行移動作用素である.

補題 2 から変数変換で次の系が得られる.

補題 3 (A_t の continuity property; Lemma 2.3, p. 5)**.** (p,q) は補題 2 と同じ条件をみたすとし，η を補題 2 の定数とすると，すべての $0 < t < \infty$ とすべての $y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|A_t - \tau_y A_t\|_{L^p \to L^q} \lesssim \left(\frac{|y|}{t}\right)^\eta t^{-n/p+n/q}.$$

2.2 定理 1 の証明

n, r, s は定理 1 の仮定をみたすものとする.

$\mathbb{R}^n$ の shifted dyadic cube の全体を $\mathcal{D}_{\mathrm{shift}}$ とする．$\mathcal{D}_{\mathrm{shift}}$ は 3^n 個の dyadic grid $\mathcal{D}^a$, $a \in \{0,1,2\}^n$, の合併である．$\mathcal{D}_{\mathrm{shift}}$, $\mathcal{D}^a$ の立方体で辺長が 2^j であるもの全体をそれぞれ $\mathcal{D}_{\mathrm{shift}}(2^j)$, $\mathcal{D}^a(2^j)$ と書く．任意にひとつ $j \in \mathbb{Z}$ をとったとき，$Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{shift}}(2^j)$ に対する $\frac{1}{3}Q$ の全体は $\mathbb{R}^n$ の分割となるから，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 f は

$$f = \sum_{a \in \{0,1,2\}^n} \sum_{Q \in \mathcal{D}^a(2^j)} f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}$$

と分解できる．上のように 2^j サイズの cube で分解した f に $A_{2^{j-2}}$ を作用させると

$$A_{2^{j-2}} f = \sum_{a \in \{0,1,2\}^n} \sum_{Q \in \mathcal{D}^a(2^j)} A_{2^{j-2}}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q})$$

であるが，この $A_{2^{j-2}}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q})$ は Q の外で 0 となる．したがって Lacunary maximal function $M_{\mathrm{lac}} f$ について

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{lac}} f &= \sup_{j \in \mathbb{Z}} A_{2^{j-2}} f = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_a \sum_{Q \in \mathcal{D}^a(2^j)} A_{2^{j-2}}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \\ &\le \sum_a \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sup_{Q \in \mathcal{D}^a(2^j)} A_{2^{j-2}}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \le \sum_a \sup_{Q \in \mathcal{D}^a} A_{\ell(Q)/4}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}) \end{aligned}$$

が成り立つ．最後のところで，後の都合で $\frac{1}{3}Q$ を $\frac{1}{2}Q$ に変えた．線形作用素 $\tilde{A}_Q$ を

$$\tilde{A}_Q f = A_{\ell(Q)/4}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}) \tag{2}$$

で定義すると，

$$M_{\mathrm{lac}} f \le \sum_a \sup_{Q \in \mathcal{D}^a} \tilde{A}_Q f$$

となる．$\tilde{A}_Q f$ の定義から

$$\tilde{A}_Q f = \mathbf{1}_Q \tilde{A}_Q (f \mathbf{1}_Q), \tag{3}$$

が成り立つことに注意しよう.

M_{lac} に対して sparse bound (1) を示すには，各 $a \in \{0,1,2\}^n$ について sparse bound

$$\langle \sup_{Q\in\mathcal{D}^a} \tilde{A}_Q f, h\rangle \le C \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \langle f\rangle_{Q,r} \langle h\mathbf{1}_{F_Q}\rangle_{Q,s}$$

を示せばよい．

さらに，j_0 を十分大きな整数とし，上の不等式の左辺にある $\sup_{Q\in\mathcal{D}^a}$ を $\ell(Q) \le 2^{j_0}$ なる $Q \in \mathcal{D}^a$ に制限した sup で置き換えたものに対して，j_0 によらない定数 C で sparse bound を示しておけば十分である．コンパクト台の関数 f が与えられたとき，j_0 を十分に大きくとって $\operatorname{supp} f$ を辺長 2^{j_0} の 2^n 個の cubes $Q_1, \ldots, Q_{2^n} \in \mathcal{D}^a$ で被覆しておけば，辺長 2^{j_0} 以下の $\mathcal{D}^a$ の cube で $\operatorname{supp} f$ と交わるものは $Q_1, \ldots, Q_{2^n}$ のいずれかに含まれるものだけだから，

$$\Big\langle \sup_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ \ell(Q)\le 2^{j_0}}} \tilde{A}_Q f, h \Big\rangle = \sum_{\nu=1}^{2^n} \Big\langle \sup_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\subset Q_\nu}} \tilde{A}_Q f, h \Big\rangle$$

となる．右辺の各項の sparse bound を示せばよい．

そこで以下では，$a \in \{0,1,2\}^n$ をひとつ固定して $\mathcal{D} = \mathcal{D}^a$ と略記し，ひとつの $Q_0 \in \mathcal{D}$ をとって，$(r,s)_{\mathrm{m}}$-sparse bound

$$\Big\langle \sup_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\subset Q_0}} \tilde{A}_Q f, h \Big\rangle \le C \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \langle f\rangle_{Q,r} \langle h\mathbf{1}_{F_Q}\rangle_{Q,s} \tag{4}$$

を示す．C は n, r, s にのみ依存する定数である．以下では $\mathcal{D}$ の立方体を単に２進立方体と呼ぶ．

$C_0 > 1$ を十分に大きくとり，２進立方体 $P \subset Q_0$ で $\langle f\rangle_{P,r} > C_0 \langle f\rangle_{Q_0,r}$ をみたすもののうち包含関係について極大なもの全体を $\mathcal{B}$ とする．$\mathcal{B}$ は互いに素な２進立方体の集合で，C_0 を十分に大きくとれば $\sum_{P\in\mathcal{B}} |P| < \frac{1}{2}|Q_0|$ が成り立つ．C_0 はこれが成り立つようにとって固定しておく．

集合 E_{Q_0} を

$$E_{Q_0} = Q_0 \setminus \bigcup_{P\in\mathcal{B}} P \tag{5}$$

と定義すると

$$|E_{Q_0}| > \frac{1}{2}|Q_0| \tag{6}$$

となる．

Q_0 に含まれる２進立方体を

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{Q \in \mathcal{D} \mid Q \subset Q_0,\ \text{すべての } P \in \mathcal{B} \text{ に対して } Q \not\subset P\}, \\ \mathcal{R} &= \{Q \in \mathcal{D} \mid Q \subset Q_0,\ \text{或る } P \in \mathcal{B} \text{ に対して } Q \subset P\} \end{aligned}$$

と２つに分け，集合 F_{Q_0} を

$$F_{Q_0} = \{x \in Q_0 \mid \sup_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f(x) \ge \sup_{Q\in\mathcal{R}} \tilde{A}_Q f(x)\} \tag{7}$$

と定義する．$\sup_{Q\in\mathcal{R}} \tilde{A}_Q f(x)$ は $\bigcup_{P\in\mathcal{B}} P$ の外では 0 であるから，

$$E_{Q_0} \subset F_{Q_0} \subset Q_0 \tag{8}$$

である．

F_{Q_0} の定義と (3) から

$$\begin{aligned}\left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset Q_0} \tilde{A}_Q f, h \right\rangle &= \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}} \right\rangle + \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{R}} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}^c} \right\rangle \\ &= \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}} \right\rangle + \sum_{P\in\mathcal{B}} \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset P} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}^c} \right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ ($F_{Q_0}^c$ は F_{Q_0} の補集合)．以下で上の等式の右辺第 1 項に対して

$$\left\langle \sup_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}} \right\rangle \le C|Q_0|\langle f\rangle_{Q_0,r}\langle h\mathbf{1}_{F_{Q_0}}\rangle_{Q_0,s} \tag{9}$$

を示す．これが示されたら，上の等式と合わせて

$$\left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset Q_0} \tilde{A}_Q f, h \right\rangle \le C|Q_0|\langle f\rangle_{Q_0,r}\langle h\mathbf{1}_{F_{Q_0}}\rangle_{Q_0,s} + \sum_{P\in\mathcal{B}} \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset P} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}^c} \right\rangle \tag{10}$$

が成り立つことになる．

(5)–(9) の構成を，Q_0 を P で置き換えて，(10) の右辺の $\sum_P$ の各項に対して行う．初めの $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}(Q_0)$ と書き，P に対応する $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}(P)$ と書くと，

$$\begin{aligned}\left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset Q_0} \tilde{A}_Q f, h \right\rangle &\le C|Q_0|\langle f\rangle_{Q_0,r}\langle h\mathbf{1}_{F_{Q_0}}\rangle_{Q_0,s} + \sum_{P\in\mathcal{B}(Q_0)} C|P|\langle f\rangle_{P,r}\langle h\mathbf{1}_{F_{Q_0}^c}\mathbf{1}_{F_P}\rangle_{P,s} \\ &\quad + \sum_{P\in\mathcal{B}(Q_0)} \sum_{P'\in\mathcal{B}(P)} \left\langle \sup_{Q\in\mathcal{D},\, Q\subset P'} \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{F_{Q_0}^c}\mathbf{1}_{F_P^c} \right\rangle\end{aligned}$$

となる．C は (10) の中と同じ C である．これを繰り返せば最終的に (4) の形の sparse bound が得られる．

$\mathcal{B}$ と $\mathcal{G}$ の定義から

$$Q\in\mathcal{G} \;\Rightarrow\; \langle f\rangle_{Q,r} \le C_0\langle f\rangle_{Q_0,r}, \tag{11}$$

$$P\in\mathcal{B},\ Q\in\mathcal{G},\ P\cap Q\ne\emptyset \;\Rightarrow\; P\subsetneq Q \tag{12}$$

が成り立つことに注意しておく．

不等式 (9) を示そう．以下では記号の簡略化のため

$$\langle f\rangle_{Q_0,r} = 1$$

と仮定する．また $h\mathbf{1}_{F_{Q_0}}$ を単に h と書く．示すべき不等式は

$$\left\langle \sup_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f, h \right\rangle \le C|Q_0|\langle h\rangle_{Q_0,s} \tag{13}$$

である．

これを示すためにまず $\sup_{Q\in\mathcal{G}}\tilde{A}_Q f$ を線形化する．すなわち，f をひとつ固定すると，互いに素な可測部分集合族 $\{G_Q\}_{Q\in\mathcal{G}}$ ですべての x で

$$\sum_{Q\in\mathcal{G}} \tilde{A}_Q f(x)\mathbf{1}_{G_Q}(x) \ge \frac{1}{2}\sup_{Q\in\mathcal{G}}\tilde{A}_Q f(x)$$

をみたすものがとれる．$\tilde{A}_Q f$ は Q の外では 0 だから $G_Q \subset Q$ としてよい．(13) の代わりに線形作用素 $\varphi \mapsto \sum_{Q\in\mathcal{G}}(\tilde{A}_Q\varphi)\mathbf{1}_{G_Q}$ に対して，$\{G_Q\}_{Q\in\mathcal{G}}$ の取り方によらない評価

$$\left\langle \sum_{Q\in\mathcal{G}} (\tilde{A}_Q f)\mathbf{1}_{G_Q}, h \right\rangle = \sum_{Q\in\mathcal{G}} \langle \tilde{A}_Q f, h\mathbf{1}_{G_Q}\rangle \le C|Q_0|\langle h\rangle_{Q_0,s} \tag{14}$$

を示せばよい．

次に f を Calderón-Zygmund 分解する．ここでは通常の Calderón-Zygmund 分解を少し変形して，各 $P \in \mathcal{B}$ に対して，P を辺長が半分の 2 進立方体に分割したものを

$$P = \bigcup_{i=1}^{2^n} P_i$$

として

$$b_P = \sum_{i=1}^{2^n} \Big(f - \langle f\rangle_{P_i,1} \Big) \mathbf{1}_{P_i}$$

と定義し，

$$f = g + b, \quad b = \sum_{P\in\mathcal{B}} b_P, \quad g = f\mathbf{1}_{E_{Q_0}} + \sum_{P\in\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{2^n} \langle f\rangle_{P_i,1}\mathbf{1}_{P_i}$$

とする．不等式 (14) の f を g と b で置き換えた不等式を示せばよい．

各 $P \in \mathcal{B}$ に対して

$$\langle b_P\rangle_{P,r} \lesssim \langle f\rangle_{P,r} \lesssim 1 \tag{15}$$

が成り立ち，g について

$$\|g\|_{L^\infty} \lesssim 1$$

が成り立つ．また，$P \in \mathcal{B}$ で Q が $P \subsetneqq Q$ なる 2 進立方体ならば，$P \cap \frac{1}{2}Q$ は或る P_i か P 自身か $\emptyset$ かのいずれかに等しく，b_P は各 P_i について $\int_{P_i} b_P(x)\,dx = 0$ が成り立つように作ったので，(12) と合わせて，

$$P \in \mathcal{B},\ Q \in \mathcal{G},\ P \cap Q \ne \emptyset \ \Rightarrow\ \int b_P(x)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}(x)\,dx = 0 \tag{16}$$

という cancellation が成り立つ．

<u>Good part g に関する評価</u>．(14) の f を g で置き換えたものについては，$\tilde{A}_Q g \le \|g\|_{L^\infty} \lesssim 1$ で $\{G_Q\}$ が互いに素であるから，

$$\sum_{Q\in\mathcal{G}} \langle \tilde{A}_Q g, h\mathbf{1}_{G_Q}\rangle \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{G}} \int_{G_Q} h(x)\,dx \le \int_{Q_0} h(x)\,dx \le |Q_0|\langle h\rangle_{Q_0,s}$$

となる．

<u>Bad part $b = \sum_P b_P$ に関する評価</u>．(14) の f を b で置き換えたものを

$$(\bigstar) = \sum_{Q\in\mathcal{G}} \langle \tilde{A}_Q b, h\mathbf{1}_{G_Q}\rangle$$

と書く．A_t の双対作用素 A_t^* を使って (実は $A_t^* = A_t$ だが A_t^* と書いておく)，

$$(\bigstar) = \sum_{Q\in\mathcal{G}} \sum_{P\in\mathcal{B}} \langle \tilde{A}_Q b_P, h\mathbf{1}_{G_Q}\rangle$$

$$= \sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}}\langle A_{\ell(Q)/4}(b_P\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}), h\mathbf{1}_{G_Q}\rangle = \sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}}\langle b_P\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}, A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})\rangle$$

と書けるから，cancellation (16) によって，

$$(\bigstar) = \sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}}\int b_P(x)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}(x)\bigl\{A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x')\bigr\}\,dx$$

と書ける．上の x' は任意の点でよい．x' を P 内で動かして平均し，$x' = x + y$ と変数変換して書き直すと，

$$\begin{aligned}(\bigstar) &= \sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}}\frac{1}{|P|}\iint b_P(x)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}(x)\mathbf{1}_P(x')\bigl\{A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x')\bigr\}\,dxdx'\\ &= \sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}}\frac{1}{|P|}\iint b_P(x)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}(x)\mathbf{1}_P(x+y)\bigl\{A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x+y)\bigr\}\,dxdy\end{aligned}$$

となる．P と同じ辺長をもち 0 を中心とする立方体を P_0 と書くと，被積分関数 $b_P(x)\mathbf{1}_P(x+y)$ が 0 でないのは $y \in 2P_0$ のときだけだから，上の y に関する積分は $y \in 2P_0$ でとればよい．$\mathcal{B}$ の立方体で辺長が 2^j であるもの全体を $\mathcal{B}(2^j)$ と書き，0 を中心とし辺長 2^j の立方体を $P_0(2^j)$ と書くと，上の等式より

$$\begin{aligned}(\bigstar) = &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{G}}\sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))}\frac{1}{|P_0(2^{-k}\ell(Q))|}\\ &\iint b_P(x)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}Q}(x)\mathbf{1}_P(x+y)\bigl\{A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x+y)\bigr\}\,dxdy\end{aligned}$$

と書ける．この y の積分範囲は $y \in 2P_0(2^{-k}\ell(Q))$ でよい．この最後の等式から Hölder 不等式を用いて

$$\begin{aligned}|(\bigstar)| \lesssim &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{G}}\Bigl\|\sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))}|b_P|\Bigr\|_{L^r(Q)}\\ &\times \sup_{y\in 2P_0(2^{-k}\ell(Q))}\Bigl\|A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x+y)\Bigr\|_{L^{r'}_x(Q)}\end{aligned}\tag{17}$$

と評価できる．

(17) の中の $L^{r'}_x(Q)$ ノルムを評価するのに補題 3 を用いる．$(1/r, 1/s)$ が L_n の内部にあるとき，$(1/r, 1/s')$ は L'_n の内部にあり，補題 3 によって

$$\begin{aligned}&\Bigl\|A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x) - A^*_{\ell(Q)/4}(h\mathbf{1}_{G_Q})(x+y)\Bigr\|_{L^{r'}_x(Q)}\\ &\le \Bigl\|A^*_{\ell(Q)/4} - \tau_{-y}A^*_{\ell(Q)/4}\Bigr\|_{L^s\to L^{r'}}\|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^s}\\ &= \Bigl\|A_{\ell(Q)/4} - A_{\ell(Q)/4}\tau_y\Bigr\|_{L^r\to L^{s'}}\|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^s}\\ &\lesssim 2^{-k\eta}|Q|^{1-1/r-1/s}\|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^s}, \qquad y \in 2P_0(2^{-k}\ell(Q)),\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに (17) より

$$|(\bigstar)| \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{G}}\Bigl\|\sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))}|b_P|\Bigr\|_{L^r(Q)}2^{-k\eta}|Q|^{1-1/r-1/s}\|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^s}\tag{18}$$

が成り立つ．

そこで (14) の f を b で置き換えた不等式を示すためには，$k \in \mathbb{N}$ に関して一様の評価

$$\sum_{Q\in\mathcal{G}} \Big\| \sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))} |b_P| \Big\|_{L^r(Q)} |Q|^{1-1/r-1/s} \|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^s} \lesssim |Q_0|^{1-1/s} \|h\|_{L^s(Q_0)} \tag{19}$$

を示せばよい．

評価 (19) を示すには $(1/r, 1/s)$ が L_n の内部にあるという条件は不要で，$1/r + 1/s \geq 1$ であることだけ使えばよい．一般に $1 \leq q \leq r'$ なるすべての q に対して

$$\sum_{Q\in\mathcal{G}} |Q|^{1-1/r-1/q} \Big\| \sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))} |b_P| \Big\|_{L^r(Q)} \|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^q} \lesssim |Q_0|^{1-1/q} \|h\|_{L^q(Q_0)} \tag{20}$$

が言える．これを示すには，補間により $q=1$ と $q=r'$ の 2 つについて (20) を示せばよい．

$\underline{q=1\text{ の場合の (20)}}$．$P \in \mathcal{B}$ が互いに素であることと (12), (15), (11) により，各 $Q \in \mathcal{G}$ について

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q))} |b_P| \Big\|_{L^r(Q)} &= \Bigg(\sum_{\substack{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q)) \\ P\subsetneqq Q}} \int_P |b_P(x)|^r \, dx \Bigg)^{1/r} \\
&\lesssim \Bigg(\sum_{\substack{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q)) \\ P\subsetneqq Q}} \int_P f(x)^r \, dx \Bigg)^{1/r} \leq \left(\int_Q f^r \, dx \right)^{1/r} \lesssim |Q|^{1/r}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$(q=1\text{ の (20) の左辺}) \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{G}} \|h\mathbf{1}_{G_Q}\|_{L^1(Q)} \leq \|h\|_{L^1(Q_0)}$$

となる．最後の $\leq$ で $\{G_Q\}$ が互いに素であることを使った．

$\underline{q=r'\text{ の場合 (20)}}$．Hölder 不等式と (12) と $\mathcal{B}$ が互いに素な族であることから，

$$\begin{aligned}
&(q=r'\text{ の (20) の左辺}) \\
&\leq \Bigg(\sum_{Q\in\mathcal{G}} \sum_{\substack{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q)) \\ P\subsetneqq Q}} \int |b_P(x)|^r \, dx \Bigg)^{1/r} \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}} \int h(x)^{r'} \mathbf{1}_{G_Q}(x) \, dx \right)^{1/r'}
\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺第 2 項は $\{G_Q\}$ が互いに素だから $\|h\|_{L^{r'}(Q_0)}$ 以下である．右辺第 1 項は，k を固定するとき $P \subsetneqq Q$ かつ $\ell(P) = 2^{-k}\ell(Q)$ なる 2 進立方体 Q はただ 1 つしかないから，

$$\begin{aligned}
\Bigg(\sum_{Q\in\mathcal{G}} \sum_{\substack{P\in\mathcal{B}(2^{-k}\ell(Q)) \\ P\subsetneqq Q}} \int |b_P(x)|^r \, dx \Bigg)^{1/r} &\leq \left(\sum_{P\in\mathcal{B}} \int |b_P(x)|^r \, dx \right)^{1/r} \\
&\lesssim \left(\sum_{P\in\mathcal{B}} \int_P f(x)^r \, dx \right)^{1/r} \leq \|f\|_{L^r(Q_0)}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$(q=r'\text{ の (20) の左辺}) \leq \|f\|_{L^r(Q_0)} \|h\|_{L^{r'}(Q_0)} = |Q_0|^{1-1/r'} \|h\|_{L^{r'}(Q_0)}$$

となる．定理 1 の証明終わり．

2.3　定理 1 の証明に関する注意

先の証明では $\frac{1}{3}Q$ を $\frac{1}{2}Q$ で置き換え Calderón-Zygmund 分解の b_P を通常と異なる仕方で作るという技巧を用いたが，別の方法でこの技巧を回避することもできる．

$\tilde{A}_Q$ の定義 (2) を

$$\tilde{A}_Q f = A_{\ell(Q)/4}(f \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \tag{21}$$

に変更すると，前と同様に各点不等式

$$M_{\mathrm{lac}}\, f \le \sum_a \sup_{Q \in \mathcal{D}^a} \tilde{A}_Q f$$

が成り立つ．Calderón-Zygmund 分解 $f = g + b$ を，通常のように

$$b = \sum_{P \in \mathcal{B}} b_P,$$
$$b_P = (f - \langle f \rangle_{P,1}) \mathbf{1}_P$$

で定義する．$\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}$ をかける作用素を同じ記号 $\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}$ で表すと，$\tilde{A}_Q = A_{\ell(Q)/4} \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}$ の双対作用素は

$$\tilde{A}_Q^* = \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \circ A^*_{\ell(Q)/4}$$

となる．(A_t は対称作用素だから右辺の $*$ はなくてもよいが，M_{full} の評価をするときの参照の便のために書いておく.) $\tilde{A}_Q^*$ を用いて前節の ($\bigstar$) の書き換えをすると，b_P は cancellation $\int_P b_P(x)\, dx = 0$ をみたすから，

$$\begin{aligned}(\bigstar) &= \sum_{Q \in \mathcal{G}} \langle \tilde{A}_Q b, h \mathbf{1}_{G_Q} \rangle \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{G}} \sum_{P \in \mathcal{B}} \int b_P(x) \big\{ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}(x) A^*_{\ell(Q)/4}(h \mathbf{1}_{G_Q})(x) - \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}(x') A^*_{\ell(Q)/4}(h \mathbf{1}_{G_Q})(x') \big\}\, dx\end{aligned}$$

となり，今度は $\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}$ にも x' が入る．前のように x' について平均して作用素ノルムで評価しようとすると，

$$\begin{aligned}&\left\| \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \circ A^*_{\ell(Q)/4} - \tau_{-y} \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \circ A^*_{\ell(Q)/4} \right\|_{L^s \to L^{r'}} \\ &= \left\| A_{\ell(Q)/4} \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - A_{\ell(Q)/4} \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \circ \tau_y \right\|_{L^r \to L^{s'}} = (*)\end{aligned}$$

の評価をする必要がある．$(*) \lesssim (|y|/\ell(Q))^\eta\, \ell(Q)^{-n/r + n/s'}$ が言えれば前と同じにできる．

$(*)$ の評価に補題 3 は直接は使えないが，

$$\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \circ \tau_y - \tau_y \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} = (\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \circ \tau_y$$

だから

$$\begin{aligned}(*) \le &\left\| A_{\ell(Q)/4} \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - A_{\ell(Q)/4} \circ \tau_y \circ \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \right\|_{L^r \to L^{s'}} \\ &+ \left\| A_{\ell(Q)/4} \circ (\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \circ \tau_y \right\|_{L^r \to L^{s'}}\end{aligned} \tag{22}$$

である．右辺の第 1 の作用素ノルムは補題 3 により $\lesssim (|y|/\ell(Q))^{\eta}\, \ell(Q)^{-n/r+n/s'}$ と評価できる．第 2 の作用素ノルムについては，$1/\tilde{r} > 1/r$ かつ $(1/\tilde{r}, 1/s')$ が L'_n の内点であるような $\tilde{r}$ をひとつとり，$1/\tilde{r} = 1/r + 1/v$ とすると，

$$\left\| A_{\ell(Q)/4} \circ (\mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q}) \circ \tau_y \right\|_{L^r \to L^{s'}} \le \left\| A_{\ell(Q)/4} \right\|_{L^{\tilde{r}} \to L^{s'}} \left\| \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \right\|_{L^r \to L^{\tilde{r}}}$$

であって，この第 1 項は補題 1（を変数変換したもの）により $\lesssim \ell(Q)^{-n/\tilde{r}+n/s'}$ であり，第 2 項は Hölder 不等式により

$$\left\| \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \right\|_{L^r \to L^{\tilde{r}}} = \| \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} - \tau_y \mathbf{1}_{\frac{1}{3}Q} \|_{L^v} \lesssim \left(\frac{|y|}{\ell(Q)} \right)^{1/v} \ell(Q)^{n/v}$$

だから，(22) の右辺の第 2 の作用素ノルム $\lesssim (|y|/\ell(Q))^{1/v}\, \ell(Q)^{-n/r+n/s'}$ である．ゆえに η を $\tilde{\eta} = \min\{\eta, 1/v\}$ で置き換えれば

$$(*) \lesssim \left(\frac{|y|}{\ell(Q)} \right)^{\tilde{\eta}} \ell(Q)^{-n/r+n/s'}$$

が成り立ち，あとは前節と同様にできる．