Notes on the paper "The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals "by J. Bennett, A. Carbery, M. Christ and T. Tao, G.A.F.A. (2008), 1343-1415.

筒井 容平 *

概要

この note は, 2020 年 3 月 7 - 9 日に信州大学 理学部で行われた第 35 回調和解析セミナーにおける筆者による講演をまとめたものである. 理解できていない部分がいくつかあり, 省略している部分がある.

1 Introduction

$m \in \mathbb{N}$ とし $H, \{H_j\}_{j=1}^m$ をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の有限次元 Hilbert space とする. 各 $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対して, 線形作用素 $B_j : H \to H_j$ を考え, それらをまとめた組

$$\mathbb{B} := (H, \{H_j\}_{j=1}^m, \{B_j\}_{j=1}^m)$$

を m-transformation と呼ぶ. これに, $\mathbb{p} = \{p_j\}_{j=1}^m$ with $1 \le p_j \le \infty$ を加えた組 $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ を *Brascamp-Lieb data* と呼ぶ. $f_j : H_j \to [0, \infty)$ とし,

$$\mathbb{f} := \{f_j\}_{j=1}^m : \text{input for } (\mathbb{B}, \mathbb{p}) \overset{\text{def}}{\iff} 0 < \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)} < \infty.$$

以上を持って,

$$BL(\mathbb{f}) = BL(\mathbb{B}, \mathbb{p}, \mathbb{f}) := \frac{\displaystyle\int_H \prod_{j=1}^m (f_j \circ B_j) dx}{\displaystyle\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)}}$$

とし.

$$BL = BL(\mathbb{B}, \mathbb{p}) := \sup_{\mathbb{f}:\text{input for } (\mathbb{B},\mathbb{p})} BL(\mathbb{B}, \mathbb{p}, \mathbb{f}) : \text{Brascamp-Lieb constant}$$

と定める. この note では, 論文 [3] 内の BL の有限性と maximizer についての部分だけを扱う. 扱う不等式は

$$\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx \le BL \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)} : \text{Brascamp-Lieb inequality}$$

である.

以後で, $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ は常に Brascamp-Lieb data で, 文脈から自明な場合は $BL(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ などで $\mathbb{B}$ と $\mathbb{p}$ を省略する.

次に, Brascamp-Lieb constant よりも小さいが重要なものを定義する. $0 \le A_j$ [*1] $: H_j$ 上の自己共役な線形作用素とする. これに対して, $f_j(x) := e^{-\pi(p_j^{-1} A_j x, x)}$, $(x \in H_j)$ と定める. $\mathbb{A} := \{A_j\}_{j=1}^m$ とする.

* 信州大学 理学部 数学科 tsutsui@shinshu-u.ac.jp

*1 $A_j \ge 0 \overset{\text{def}}{\iff} (A_j x, x) \ge 0, \ (x \in H_j)$

Lemma 1.1.

$$BL(\mathbb{f}) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{m} \det A_j^{1/2}}{\det\left(\sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} B_j^* A_j B_j\right)} \right)^{1/2} =: BL_g(\mathbb{A}).$$

さらに,

$$BL_g := \sup_{\mathbb{A}:\text{上のようなもの}} BL_g(\mathbb{A}) : \text{Geometric Brascamp-Lieb constant}$$

とする.

次の定理は興味深く, 論文 [3] でも証明を与えていますが, 私が理解していないためこの note では証明を与えていません.

Theorem A (Lieb [6])**.** $BL = BL_g$.

Remark 1.1. *Theorem A は, BL や BL_g が有限であることを主張するものではない.*

1.1 Non-degenerate condition

次の非退化条件は, Brascamp-Lieb inequality の成立のための必要条件であることが知られている. そのことは, Theorem A と以下の Theorem 1.2 と Proposition 1.1 から確認できる.

Definition 1.1. *M-transformation $\mathbb{B}$ が次の 2 条件を満たすとき, $\mathbb{B}$ は non-degenerate であるという:*

$$\bullet \text{ 各 } B_j : H \to H_j \text{ は surjective} \tag{N.D.1}$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{m} \ker B_j = \{0\}. \tag{N.D.2}$$

まず, 基本的なことをまとめておく.

Lemma 1.2. *(1)* [*2]

$$BL = \sup_{\substack{\mathbb{f}:\text{input for } (\mathbb{B},\mathbb{p}) \\ 0<f_j\in\mathcal{S}(H_j)}} BL(\mathbb{f}).$$

(2) $\mathbb{B}$*:non-degenerate* $\Rightarrow BL > 0$.

(3) $\mathbb{B}$*:non-degenerate,* $f_j \in L_0^{\infty}$[*3]*: input for* $(\mathbb{B},\mathbb{p}) \Rightarrow BL(\mathbb{f}) < \infty$.

Proof. (1): $\geq$ は自明.
$\mathbb{f}$: input for $(\mathbb{B},\mathbb{p})$ を取る.

$$E_j := \{x \in H_j; f_j(x) \neq 0\} \ \& \ E_j^m := \{x \in H_j; f_j(x) > 1/m\}$$

と定めると, $|E_j| > 0$ かつ $|E_j^m| \leq \left(m\|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)}\right)^{p_j} < \infty$ がわかる. $E_j^1 \subset E_j^2 \subset \cdots \subset E_j$ で $|E_j^m| \to |E_j|$ as $m \to \infty$ より, ある $M \in \mathbb{N}$ があって, $m \geq M$ に対して, $|E_j^m| \geq |E_j|/2 > 0$. 従って, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ with $0 < \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$f_j^\varepsilon(x) := \int_{H_j} f_j(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy \underset{f_j,\varphi_\varepsilon>0}{\geq} \int_{E_j^m} \cdots dy \geq \frac{1}{m}\int_{E_j^m} \varphi_\varepsilon(x-y)dy > 0.$$

また, $\|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\|f_j^\varepsilon\|_{L^{p_j}(H_j)}$ である. [*4]

一方, $f_j^\varepsilon \circ B_j \to f_j \circ B_j$ a.e. on H である. 実際, $F_j := \{x \in H_j; f_j^\varepsilon(x) \not\to f_j(x) \text{ as } \varepsilon \searrow 0\}$ とおくと, $f_j^\varepsilon \to f_j$ a.e. on H_j から, $|F_j| = 0$. 従って, $|B_j^{-1}(E_j)| = \int_{B_j^{-1}(E_j)} dx = \int_{E_j} |\det B_j| dx = |F_j||\det B_j| = 0$. これは, $f_j^\varepsilon \circ B_j \to f_j \circ B_j$ a.e. on H を意味する.

---

*2 [3] では, $0 < p_j < \infty$ で成立すると書いてますが, $0 < p_j < 1$ の場合はどうやるかわかりません.
*3 L^∞ かつ compact support の意味
*4 ここで, $p_j \geq 1$ が必要だと思います.

これを用いると, Fatou's lemma から

$$\begin{aligned}\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx &\le \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_H \prod_{j=1}^m f_j^\varepsilon \circ B_j dx \\ &\le \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sup_{\substack{\mathbb{f}:\text{input for } (\mathbb{B},\mathbb{p}) \\ 0<f_j \in \mathcal{S}(H_j)}} BL(\mathbb{f}) \right) \prod_{j=1}^m \|f_j^\varepsilon\|_{L^{p_j}(H_j)} \\ &= \left(\sup_{\substack{\mathbb{f}:\text{input for } (\mathbb{B},\mathbb{p}) \\ 0<f_j \in \mathcal{S}(H_j)}} BL(\mathbb{f}) \right) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)}\end{aligned}$$

(2) 原点付近で $f_j \ge c_j > 0$ であるとすると, $B_j : H \to H_j$ は連続なので,

$$\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx \ge \int_{\|x\| \ll {}^\exists \varepsilon} \cdots dx \ge \prod_{j=1}^m c_j |B(0,\varepsilon)| > 0.$$

(3) $\displaystyle\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx < \infty$ を示せばよい.

$$f_j \circ B_j(x) \ne 0 \Rightarrow B_j x \in \operatorname{supp} f_j \Rightarrow x \in \underbrace{B_j^{-1}(\operatorname{supp} f_j)}_{compact} =: K_j$$

であり, $\operatorname{supp}\left(\displaystyle\prod_{j=1}^m f_j \circ B_j\right) \subset \displaystyle\bigcap_{j=1}^m \operatorname{supp}(f_j \circ B_j)$ でもあるから

$$\operatorname{supp}(f_j \circ B_j) \subset \bigcap_{j=1}^m K_j \subset B(0, {}^\exists R).$$

従って, $\displaystyle\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx \le \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)} |B(0,R)| < \infty.$ □

この節の残りで, この note で具体的に何をする概説する.

1.2 Geometric Case

Section 2 では, Brascamp-Lieb data $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ に対して, 次の geometric condition を課し, Lieb's theorem (Theorem A) を示す.

Definition 1.2. *Brascamp-Lieb data* $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ *が 以下の 2 条件を満たすとき,* $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$ *は geometric であるという:*

$$\bullet\ B_j B_j^* = id_{H_j} \tag{G1}$$

$$\bullet\ \sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* B_j = id_H \tag{G2}$$

Remark 1.2. 今の場合*, adjoint* $B_j^* : H_j \to H$ *は,* $D(B_j^*) = H_j$ *な線形作用素として定まる.*

具体的には, 次の定理を Section 2 で示す.

Theorem 1.1 (Ball [1], Barthe [2])**.** $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$*:geometric* $\Rightarrow BL = BL_g = 1$ *であり, それぞれ* $f_j(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ *と* $A_j = id_{H_j}$ *で attain する.*

Remark 1.3. *1. Theorem 1.1 では, extremizer の一意性については論じていない.*

2. $(G1) \Rightarrow B_j^* : H_j \to H$ *は isometry. (故に,* B_j^* *は, injective.)*

実際, $\|B_j^* y\|_H^2 = (B_j B_j^* y, y) \underset{(G1)}{=} (y,y) = \|y\|_{H_j}^2.$

3. $(\mathbb{B},\mathbb{p})$*: geometric* $\Rightarrow$ $(\mathbb{B})$*: non-degenerate.* *(これより，強い主張が Proposition 1.1 にある)*
実際, $y \in H_j$ に対して, $x := B_j^* y \in H$ とすると, $B_j x = B_j B_j^* x \underset{(G1)}{=} y$ となり, B_j は *surjective.* 一方, $^\forall j$ に対して, $B_j x = 0$ とすると, $B_j^* B_j x = 0$ より, *(G2)* から $x = \sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* B_j x = 0$.

Example 1.1. (i) *Multilinear Hölder inequality.*
$H_j = H,\ B_j = id_H$ とすると, $B_j^* = id_{H_j}$ がすぐにわかる．つまり，この場合の *Brascamp-Lieb inequality* は

$$\int_H \prod_{j=1}^m f_j dx \le BL \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H)}$$

となり，これは *multilinear Hölder inequality* である．$\mathbb{B}$ が, *non-degenerate* なのは自明．これがいつ成立するか，つまり, $BL = BL(\mathbb{B},\mathbb{p}) < \infty$ となる $\mathbb{p} = \{p_j\}_{j=1}^m$ の条件を *geometric* であるかで考えると,

$$(\mathbb{B},\mathbb{p}) : \text{geometric} \iff 1 \le p_j < \infty \ \&\ 1/p_1 + \cdots + 1/p_n = 1$$

がわかる．実際, $(G1)$ は自明で,

$$(G2) \iff \sum_{j=1}^m p_j^{-1} id_H = id_H \iff 1/p_1 + \cdots + 1/p_m = 1.$$

(ii) *Loomis-Whitney inequality* *([7] for* $n = 2$*, [5] for* $n \ge 2$*)*
$H = \mathbb{R}^n,\ H_j = \mathbb{e}_j^\perp := \{x = \{x_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n; x_j = 0\},\ B_j := P_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{e}_j^\perp$: *orthogonal projection* とすると，この場合の *Brascamp-Lieb inequality* は

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(x_1, \overset{\overset{x_j}{\vee}}{\cdots}, x_n) dx \le BL \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

の形になり，これはいわゆる *Loomis-Whitney inequality* である．$\mathbb{B}$ が, *non-degenerate* なのは自明．*BL* が有限になる $\mathbb{p} = \{p_j\}_{j=1}^n$ を, $(\mathbb{B},\mathbb{p})$ がいつ *geometric* になるかで探すと,

$$(\mathbb{B},\mathbb{p}) : \text{geometric} \iff p_j = n - 1.$$

実際, $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{e}_j^\perp$ に対して, $(x, B_j^* y) = (B_j x, y) = x_1 y_1 + \overset{\overset{x_j y_j}{\vee}}{\cdots} + x_n y_n$ より, $B_j^* y = (y_1, \cdots, \overset{\overset{jth}{\vee}}{0}, \cdots, y_n)$．つまり, $B_j^* = \mathrm{id}_{\mathbb{e}_j^\perp}$．これより, $B_j B_j^* = B_j|_{\mathbb{e}_j^\perp} = \mathrm{id}_{\mathbb{e}_j^\perp}$．また, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\sum_{j=1}^n p_j^{-1} B_j^* B_j x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) = (x_1, \cdots, x_n) \iff p_j = n - 1$.

1.3 Necessary and sufficiently condition for Brascamp-Lieb inequality

Definition 1.3.

- Scale condition : $\dim H = \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j.$ (S)
- Dimensional condition : $V \subset H$: subspace, $\dim V \le \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim B_j V.$ (D)

Remark 1.4. 条件 (D) は *[4]* では, *transversality condition* と呼ばれている．*(が，どういう意味かはわかりません.)*

この 2 つの条件が, Brascamp-Lieb inequality が成立するための必要十分条件であることが知られている.

Theorem 1.2.

$$BL_g < \infty \iff (S)\ と\ (D)\ が成立.$$

Remark 1.5. *1. Theorem A* を用いると, (S) と (D) が, $BL < \infty$ のための必要十分条件であることがわかる．
また, *[3]* では *exremizer* についての議論もあるが，ここでは述べない.*(*理解していないので述べれない*.)*

2. (S) は, *Brascamp-Lieb inequality* で $f_j(x) = f_j(\lambda x)$ を代入すると必要であることが容易に確認できる.

この節の最後に, non-degenrate, geometric, (S) & (D) の関係を述べる.

Proposition 1.1. (i) $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$*: geometric* $\Rightarrow$ (S) & (D) *hold.*

(ii) (S) & (D) *hold* $\Rightarrow$ $(\mathbb{B}, \mathbb{p})$*: non-degerate.*

Proof. (i) まず, (S) を確かめる. $(G2)$ から, $\sum_{j=1}^m p_j^{-1}\mathrm{tr}(B_j^* B_j) = \mathrm{tr}(id_H) = \dim H$. ここで, $\mathrm{tr}(B_j^* B_j) = \mathrm{tr}(B_j B_j^*)$ より

$$\dim H = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}\mathrm{tr}(B_j^* B_j) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}\mathrm{tr}(B_j B_j^*) \overset{(G1)}{=} \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j.$$

次に (D) を確かめる. $V \subset H$:subspace を取り, $P_V : H \to V$ を orthogonal projection とする. 上と同様に, $(G2)$ から, $\sum_{j=1}^m p_j^{-1}\mathrm{tr}(P_V B_j^* B_j) = \mathrm{tr}P_V$. まず, ここで $\mathrm{tr}P_V = \dim V$ である.

実際, $\{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H} : H$ の O.N.S. [a] を取り, $P_V \overset{\{\mathbb{e}_j\}_j}{=} A_V$ とする. つまり, $P_V(\mathbb{e}_k) = \sum_{j=1}^{\dim H} a_{j,k}\mathbb{e}_j$ で, $A_V = \{a_{j,k}\}_{j,k}$. P_V は self-adjoint であるから, ある直交行列 S を用いて

$$S^{-1} A_V S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\dim H} \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{\dim H} \geq 0.$$

よって, $\mathrm{tr}P_V = \mathrm{tr}A_V = \sum_{j=1}^{\dim H} \lambda_j$. $\lambda_\ell \neq 0$ の時, $W_\ell := \{x \in H\backslash\{0\}; P_V(x) = \lambda_\ell x\} (\neq \emptyset)$ とおくと,

$$x \in W_\ell \Rightarrow \lambda_\ell x = P_V(x) \in V \Rightarrow W_\ell \subset V \Rightarrow P_V(x) = x \Rightarrow \lambda_\ell = 1.$$

逆に,

$$x \in V \Rightarrow P_V x = x \Rightarrow x \in W_\ell \text{ for } \lambda_\ell \neq 0,$$

thus $W_\ell = V$ for such ℓ. 故に, $\mathrm{tr}P_V = \dim V$ である.

[a] 正規直行系, i.e. $(\mathbb{e}_j, \mathbb{e}_k) = \delta_{j,k}$.

従って, $\dim V = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}\mathrm{tr}(P_V B_j^* B_j)$. あとは,

$$\mathrm{tr}\left(P_V B_j^* B_j\right) \leq \dim B_j V$$

を示せばよいが, これの証明がわかりませんでした.

(ii) (S) と (D) with $V = H$ より,

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j \underset{(S)}{=} \dim H \underset{(D)}{\leq} \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim B_j H.$$

一方, $B_j H \subset H_j$ より $\dim H_j \geq \dim B_j H$. ここで, ある $j_0 \in \{1, \cdots, m\}$ で $\dim H_{j_0} > \dim B_{j_0} H$ であると仮定すると,

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j > \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim B_j H$$

が成立し, 上の不等式と矛盾する. つまり, 全ての j に対して, $\dim H_j \leq \dim B_j H$. よって, $\dim H_j = \dim B_j H$ となり, $B_j : H \to H_j$ は surjective.

次に, (D) with $V = \bigcap_{j=1}^m \ker B_j \subset H$ から,

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^m \ker B_j\right) \underset{(D)}{\leq} \sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim\left(B_j\left(\bigcap_{k=1}^m \ker B_k\right)\right) = 0$$

を得る. □

2 Proof of Theorem 1.1

この節の目標は, Theorem 1.1 を証明することである. ただし, 理解できていない部分があるので, 省略している部分がある. div や ∇ については, Subsection 4.3 を参照.

2.1 Monotonicity of a quantity for the solution to transport equations

Theorem 1.1 の証明では, 輸送方程式の保存量が用いられる. それに関する補題から始める.

Lemma 2.1. $I \subset \mathbb{R}$: *interval,* $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. $0 \le u \in C^\infty(I \times H)$, $\vec{v} \in C^\infty(I \times H \to H)$ を取る. 以下の *2* 条件*:*

$$\text{(i) } J \subset I : \text{compact},\ N \in \mathbb{N} \text{ に対して, } \sup_{t \in J} \|u(t,x)\vec{v}(t,x)\| \lesssim \|x\|^{-N} \text{ if } \|x\| \gg 1$$

$$\text{(ii) } \partial_t u + \mathrm{div}(u\vec{v}) \ge \alpha u/t \text{ on } I \times H$$

が成立するならば,

$$Q(t) \coloneqq t^{-\alpha} \int_H u(t) dx \nearrow \quad \text{as } t \nearrow \infty.\text{[*5]}$$

ただし, *2* つ目の条件の不等号 $\ge$ が, $>$, $\le$, $<$ で成立すると, 結論の単調性もそれに従う.

Proof. $\tilde{u}_j(t,x) \coloneqq t^{-\alpha} u_j(t,x)$ とおくと, 仮定より

$$\partial_t \tilde{u}_j \ge -\mathrm{div}(\vec{v}\tilde{u})$$

となるので, $\alpha = 0$ の場合が正しければ, $Q(t) = \int_H \tilde{u}_j(t) dx \nearrow \infty$ as $t \nearrow$. 故に, $\alpha = 0$ の場合だけ示す. $t_1 < t_2$ in I をとる. $0 \le \psi \in C_0^\infty(H)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\int_H u(t_2)\psi dx - \int_H u(t_1)\psi dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_H \psi \partial_t u \ dxdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_H \psi \partial_t u + \mathrm{div}\,(\psi \vec{v} u)\, dxdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_H \psi \partial_t u + \mathrm{div}\,(\vec{v} u)\, \psi \ dxdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_H (\nabla\psi) \cdot \vec{v} u \ dxdt \\
&\ge \int_{t_1}^{t_2} \int_H (\nabla\psi) \cdot \vec{v} u \ dxdt.
\end{aligned}$$

ここで, $0 \le \varphi \in C_0^\infty(B(0,1)) \le 1$ with $\varphi \equiv 1$ on $B(0,1/2)$ をとり, 上の議論に $\psi = \varphi(\varepsilon\cdot)$ を代入すると, $\nabla\psi = \varepsilon(\nabla\varphi)(\varepsilon\cdot)$ なので,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_H (\nabla\psi) \cdot \vec{v} u \ dxdt = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_H (\nabla\varphi)(\varepsilon x) \vec{v}(t,x) u(t,x) \ dxdt \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0$$

となり, $\int_H u(t_1) dx \le \int_H u(t_2) dx$ を得る. □

この補題を次のように拡張し, Theorem 1.1 の証明に用いる.

Lemma 2.2. $m \in \mathbb{N}$, $0 < q_1, \cdots, q_m < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. 各 $j \in \{1, \cdots, m\}$, $0 < u_j \in C^\infty((0,\infty) \times H)$, $\vec{v}$, $\vec{v}_j \in C^\infty((0,\infty) \times H \to H)$ が次を満たすと仮定する*:*

$$\text{(i) } J \subset (0,\infty) : \text{compact } N \in \mathbb{N} \text{ に対して,} \sup_{t \in J} \left\| \vec{v}(t,x) \prod_{j=1}^m u_j(t,x)^{q_j} \right\| \lesssim \|x\|^{-N} \text{ if } \|x\| \gg 1$$

$$\text{(ii) } \partial_t u_j + \mathrm{div}\,(\vec{v}_j u_j) \ge 0 \text{ on } (0,\infty) \times H$$

$$\text{(iii) } \mathrm{div}\left(\vec{v} - \sum_{j=1}^m q_j \vec{v}_j\right) \ge \alpha/t \text{ on } (0,\infty) \times H$$

$$\text{(iv) } \sum_{j=1}^m q_j (\vec{v} - \vec{v}_j, \nabla \log u_j) \ge 0 \text{ on } (0,\infty) \times H.$$

[*5] $\nearrow$ は, 単調増大を表す. 狭義の意味ではない

この時,

$$Q(t) := t^{-\alpha}\int_H \prod_{j=1}^m u_j(t)^{q_j}\,dx \nearrow \ \ \text{as } t\nearrow\infty.$$

また, (ii), (iii), (iv) の内 *1* つでも "$\geq$" が "$>$" で成立すれば, Q は狭義単調増大になる. さらに, (ii), (iii), (iv) の不等式が全て逆を向くと Q の単調性も逆になる.

Proof. Lemma 2.1 を $U := \sum_{j=1}^m u_j^{q_j}$ に対して,

$$\partial_t U + \mathrm{div}\,(\vec{v}u) \geq \frac{\alpha}{t}U$$

を示せば十分である. ところで,

$$\partial_t U = \cdots = U\sum_{j=1}^m q_j\frac{\partial_t u_j}{u_j}\ \ \&\ \mathrm{div}\,(\vec{v}u) = (\mathrm{div}\ \vec{v})\,U + (\vec{v},\nabla U)$$

であり, $\partial_j U = \cdots = U\sum_{k=1}^m q_k\dfrac{\partial_j u_k}{u_k}$ であるから, 次を示せば十分.

$$\sum_{j=}^m q_j\frac{\partial_t u_j}{u_j} + \mathrm{div}\ \vec{v} + \left(\vec{v},\sum_{j=1}^m q_j\frac{\partial_j u_j}{u_j}\right) \geq \alpha/t.$$

仮定 (ii), (iii), (iv) より,

$$\text{左辺} = \sum_{j=}^m \frac{q_j}{u_j}\left(\partial_t u_j + \mathrm{div}(\vec{v}_j u_j)\right) + \mathrm{div}\left(\vec{v} - \sum_{j=1}^m q_j\vec{v}_j\right) + \sum_{j=1}^m q_j(\vec{v}-\vec{v}_j,\nabla\log u_j) \geq \alpha/t.$$

従って, Lemma 2.1 より証明が完了する. □

2.2 Proof of Theorem 1.1

$$BL \geq BL_g \geq BL_g(\{\mathrm{id}_{H_j}\}) = \left(\frac{\prod_{j=1}^m\left(\det\ \mathrm{id}_{H_j}\right)^{1/p_j}}{\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1}B_j^*\mathrm{id}_{H_j}B_j\right)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1}B_j^*B_j\right)}\right)^{1/2} = 1$$

であるから, $BL \leq 1$ を示せば, 証明は完了する.

$0 < u_j \in C^\infty((0,\infty)\times H)$ を

$$\begin{cases}\partial_t u_j - \Delta u_j = 0\\ u_j(0) = (f_j\circ B_j)^{p_j}\end{cases}$$

で定める. つまり,

$$u_j(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\dim H/2}\int_H e^{-\|x-y\|^2/4t}f_j\circ B_j(y)^{p_j}\,dy.$$

Claim 1:

$$u_j(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\dim R(B_j^*)/2} \int_{R(B_j^*)} e^{-\|B_j x - B_j y\|^2/(4t)} f_j \circ B_j(y)^{p_j} dy.$$

$\because$ まず, orthogonal projection $P_{R(B_j^*)} : H \to R(B_j^*)$ に対して, $P_{R(B_j^*)} = B_j^* B_j$ を示す. $x \in H$ に対して, $B_j x = B_j P_{R(B_j^*)} x$ である. これより, $x \in H$ に対して,

$$\begin{aligned} B_j^* B_j x &= B_j^* B_j P_{R(B_j^*)} x \\ &= B_j^* B_j (B_j^* y_x) \text{ for some } y_x \in H_j \\ &\underset{(G1)}{=} B_j^* y_x \\ &= P_{R(B_j^*)} x. \end{aligned}$$

これと B_j^* の等長性から, $x, y \in H$ に対して

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\| P_{R(B_j^*)}(x-y) \right\|^2 + \left\| P^\perp_{R(B_j^*)}(x-y) \right\|^2 \\ &= \left\| B_j x - B_j P_{B_j^*} y \right\|^2 + \left\| P^\perp_{R(B_j^*)} x - P^\perp_{R(B_j^*)} y \right\|^2. \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} u_j(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\dim H/2} & \left[\int_{R(B_j^*)^\perp} e^{-\left\| P^\perp_{R(B_j^*)} x - P^\perp_{R(B_j^*)} y \right\|^2/(4t)} dP^\perp_{R(B_j^*)} y \right] \\ & \times \int_{R(B_j^*)} e^{-\left\| B_j x - B_j P_{R(B_j)} y \right\|^2/(4t)} f_j \circ B_j (P_{R(B_j)} y)^{p_j} dP_{R(B_j)} y. \end{aligned}$$

ここで, 1 つ目の積分は以下のように計算できる, その際, Lemma 4.1 を用いている.

$$\begin{aligned} [\cdots] &= \int_{R(B_j^*)^\perp} e^{-\|y\|^2/(4t)} dy \\ &= (2\sqrt{\pi t})^{\dim R(B_j^*)^\perp} \int_{R(B_j^*)^\perp} e^{-\pi (y,y)} dy \\ &= (4\pi t)^{(\dim H - \dim R(B_j^*))/2}. \end{aligned}$$

以下では, 証明を理解できていないため, 簡単な場合

$$H_j \subset H \ \& \ B_j = P_{H_j} : H_j \text{への orthogonal projection}$$

を考える. この時, $B_j^* = id_{H_j}$ であるので, $R(B_j^*) = H_j$ となる. 従って, Claim 1 は, 以下のようになる:

$$u_j(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\dim H_j/2} \int_{H_j} e^{-\|B_j x - y\|^2/(4t)} f_j(y)^{p_j} dy. \tag{1}$$

次に, Lemma 2.2 with $q_j = 1/p_j$ を使うために,

$$\vec{v}_j := -\nabla_x \log u_j : (0,\infty) \times H \to H \ \& \ \vec{v} := \sum_{j=}^{m} p_j^{-1} \vec{v}_j : (0,\infty) \times H \to H$$

と定める.

Claim 2: これらは, Lemma 3.1 の仮定 (i) - (iv) を満たす.
$\because$ (ii) と (iii) は, 定義から明らかである. (i) は, わからない. (iv) を確認するために, 次を注意する: $\vec{v}_j = B_j^* B_j \vec{v}_j$. これは......

これより, $\nabla \log u_j = -\vec{v}_j = -B_j^* B_j \vec{v}_j$ なので,

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1}(\vec{v} - \vec{v}_j, \nabla \log u_j) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}(B_j^* B_j(\vec{v} - \vec{v}_j), -\vec{v}_j).$$

$(G2)$ から, $\sum_{j=1}^m B_j^* B_j(\vec{v} - \vec{v}_j) = \vec{v} - \vec{v} = 0$ であるので,

$$\sum_{j=1}^m p_j^{-1}(\vec{v} - \vec{v}_j, \nabla \log u_j) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}(B_j^* B_j(\vec{v} - \vec{v}_j), \vec{v} - \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1}\|B_j(\vec{v} - \vec{v}_j\|^2 \geq 0.$$

以上より, Lemma 2.2 with $q_j = 1/p_j$ and $\alpha = 0$ から

$$Q(t) = \int_H \prod_{j=1}^m u_j(t)^{1/p_j} dx \nearrow \text{ as } t \nearrow$$

を得る. また, 方程式より $u_j(t,x) \to f_j \circ B_j(x)^{p_j}$ as $t \to 0$ であるので

$$\int_H \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j dx = \int_H \lim_{t \searrow 0} \prod_{j=1}^m u_j(t)^{1/p_j} dx \leq \liminf_{t \searrow 0} Q(t) \leq \limsup_{t \nearrow \infty} Q(t).$$

後は, $\limsup_{t \nearrow \infty} Q(t) \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)}$ を示せばよい. これは, 以下のようにわかる.

$$\begin{aligned} Q(t) &= (4\pi t)^{-\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j} \int_H \prod_{j=1}^m \left(\int_{H_j} e^{-\|B_j x - y\|^2/(4t)} f_j(y)^{p_j} dy \right)^{1/p_j} dx \\ &\underset{(S)}{=} (4\pi t)^{-\dim H/2} \int_H \dots dx \\ &= (4\pi)^{-\dim H/2} \int_H \prod_{j=1}^m \left(\int_{H_j} e^{-\|B_j x - y/\sqrt{t}\|^2/4} f_j(y)^{p_j} dy \right)^{1/p_j} dx \\ &\underset{t \nearrow \infty}{\to} (4\pi)^{-\dim H/2} \int_H \prod_{j=1}^m \left(\int_{H_j} e^{-\|B_j x\|^2/4} f_j(y)^{p_j} dy \right)^{1/p_j} dx \\ &= (4\pi)^{-\dim H/2} \int_H e^{-(\sum_{j=1}^m p_j^{-1}\|B_j x\|^2/4)} dx \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)} \\ &= \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(H_j)}. \quad \because \text{ Lemma 4.1} \end{aligned}$$

□

3 Proof of Theorem 1.2

この節では, Theorem 1.2 を証明する.

3.1 A lemma

そのために, 補題を 1 つ用意しておく.

Lemma 3.1. 全ての $V \subset H$: *subspace* に対して,

$$\dim (H/V) \geq \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim (H_j/B_j V) \tag{2}$$

が成立すれば, 任意の H の *O.N.S.* $\{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^{\dim H}$ に対して, 以下の *4* 条件を満たす $I_j \subset \{1, \cdots, \dim H\}$, $(1 \leq j \leq m)$ が存在する:

(i) ${}^{\#}I_j = \dim H_j$

(ii) 各 $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対して, $\{B_j \mathbb{e}_i\}_{i \in I_j} \subset H_j$: 線形独立

(iii) 各 $k \in \{0, \cdots, \dim H\}$ に対して, $\sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{1, \cdots, k\}\} \leq k$

(iv) (S) が成立するならば, 各 $k \in \{1, \cdots, \dim H\}$ に対して, $\sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{k, \cdots, \dim H - 1\}\} \geq \dim H - k + 1$.

Remark 3.1. (S) が成立すると仮定すると, $(D) \iff (2)$.
実際,

$$\begin{aligned}
\dim (H/V) &= \dim H - \dim V \\
&\underset{(D)}{\geq} \dim H - \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim B_j V \\
&= \dim H - \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} (\dim H_j - \dim (H_j/B_j V)) \\
&\underset{(S)}{=} \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim (H_j/B_j V)
\end{aligned}$$

であるから, 同値性は確認できる.

Proof. ${}^{\forall} j \in \{1, \cdots, m\}$ をとる. 次の操作で, I_j を構成する.

$$\begin{cases} \bullet\ B_j \mathbb{e}_{\dim H} \neq 0 \Rightarrow \dim H \in I_j \\ \bullet\ i < \dim H \text{ に対しては}, B_j \mathbb{e}_i \notin \operatorname{span}\left(\{\mathbb{e}_{i'}\}_{i'=i+1}^{\dim H}\right) \Rightarrow i \in I_j. \end{cases}$$

この作り方から, (ii) は ok.

次の (i) を確認する. (2) with $V = H$ より, $\dim(H_j/B_j H) = 0$, つまり $B_j : H \to H_j$ は surjective であるので, 任意の $y \in H_j$ に対して, $x_y \in H$ で $y = B_j x_y$ となるものがある. $x_y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{e}_k$ とすると, $y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k B_j \mathbb{e}_k = \sum_{k \in I_j} \tilde{\alpha}_k B_j \mathbb{e}_k$ と書ける. よって, (ii) より (i) は ok.

(iii) については, $k = 0$ の場合は自明. $k = \dim H$ の場合は, (2) with $V = \{0\}$ として用いると

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{1, \cdots, \dim H\}\} = \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim H_j \leq \dim H.$$

$1 \leq k \leq \dim H - 1$ の場合は, (2) with $V = \{\mathbb{e}_j\}_{j=k+1}^{\dim H}$ として用いると,

$$k = \dim(H/V) \geq \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim(H_j/B_j V) = \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \left({}^{\#}I_j - \dim B_j V\right).$$

ここで, I_j の作り方から $\dim B_j V = {}^{\#}\{I_j \cap \{k+1, \cdots, \dim H\}\}$ なので (iii) を得る.

(iv) は, (iii) より出る. 実際, (S) より

$$\begin{aligned}
\dim H &= \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \dim H_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{1, \cdots, k\}\} + \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{k+1, \cdots, \dim H\}\} \\
&\leq k + \sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} \ {}^{\#}\{I_j \cap \{k+1, \cdots, \dim H\}\}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Proof of Theorem 1.2

まず, $BL_g < \infty \Rightarrow (S)$ and (D) を示す. (S) を確かめるのは以下のように容易: $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\infty > BL_g &\geq BL_g(\mathbb{B}, \mathbb{p}, \{\lambda \mathrm{id}_{H_j}\}_{j=1}^m) \\ &= \left(\frac{\prod_{j=1}^m \det\left(\lambda \mathrm{id}_{H_j}\right)^{1/p_j}}{\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* \left(\lambda \mathrm{id}_{H_j}\right) B_j\right)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\prod_{j=1}^m \lambda^{p_j^{-1} \dim H_j}}{\lambda^{\dim H} \det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* B_j\right)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\lambda^{\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim H_j - \dim H\right)}}{\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* B_j\right)} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

が成立するので, (S) を得る.

次に (D) を確かめる. $V \subset H$:subspace をとる. $P_j : H_j \to B_j V$ と $P_j^{\perp} : H_j \to (B_j V)^{\perp}$ をそれぞれ orthogonal projection とする. $\varepsilon \in (0,1)$ に対して, $A_j^{\varepsilon} \coloneqq \varepsilon P_j \otimes P_j^{\perp} : H_j \to H_j$ と定める. ここで, 次を主張する.

Claim:

- $$\det A_j^{\varepsilon} = \varepsilon^{\dim B_j V} \tag{claim 1}$$
- $$\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* A_j^{\varepsilon} B_j\right) \lesssim \varepsilon^{\dim V}. \tag{claim 2}$$

この claim が正しいとすると,

$$\begin{aligned}\infty > BL_g(\mathbb{B}, \mathbb{p}, \mathbb{A}^{\varepsilon}) &= \left(\frac{\prod_{j=1}^m \left(\det A_j^{\varepsilon}\right)^{1/p_j}}{\det\left(\sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* A_j^{\varepsilon} B_j\right)} \right)^{1/2} \\ &\gtrsim \varepsilon^{\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim B_j V - \dim V}.\end{aligned}$$

故に, $\sum_{j=1}^m p_j^{-1} \dim B_j V - \dim V \geq 0$ を得る.

後は, claim を示せばよい. まずは, (claim 1) を確かめる. $\{\mathbb{e}_k\}_{k=1}^{\dim H_j} : H_j$ の基底で,

$$\mathbb{e}_k \in \begin{cases} B_j V & \text{if } 1 \leq k \leq \dim B_j V \\ (B_j V)^{\perp} & \text{if } \dim B_j V + 1 \leq k \leq \dim H_j \end{cases}$$

とるものをとる. すると,

$$A_j^{\varepsilon} \mathbb{e}_k \in \begin{cases} \varepsilon \mathbb{e}_k & \text{if } 1 \leq k \leq \dim B_j V \\ \mathbb{e}_k & \text{if } \dim B_j V + 1 \leq k \leq \dim H_j \end{cases}$$

であるから, $A_j^\varepsilon \mathbb{e}_k = \sum_{\ell=1}^{\dim H_j} \alpha_{k,\ell}\mathbb{e}_\ell$ with

$$\alpha_{k,\ell} = \begin{cases} \varepsilon\delta_{k,\ell} & \text{if } 1 \le k \le \dim B_j V \\ \delta_{k,\ell} & \text{if } \dim B_j V + 1 \le k \le \dim H_j. \end{cases}$$

故に,

$$\begin{aligned}
\det A_j^\varepsilon &= \det\left(\{\alpha_{k,\ell}\}\right) \\
&= \det\left(\begin{array}{ccc|ccc} \varepsilon & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & & \varepsilon & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right) \\
&= \varepsilon^{\dim B_j V}.
\end{aligned}$$

次に, (claim 2) を確かめる. $T \coloneqq \sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* B_j$, $T_\varepsilon \coloneqq \sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* A_j^\varepsilon B_j$ と定める. $\{\mathbb{e}_k\}_{k=1}^{\dim V}$: V の O.N.S. で, $\{\mathbb{e}_k\}_{k=1}^{\dim H}$: H の基底とする. すると,

$$\begin{aligned}
k \le \dim V \Rightarrow T_\varepsilon \mathbb{e}_k &= \varepsilon T \mathbb{e}_k \\
&= \sum_{\ell=1}^{\dim H} \varepsilon\alpha_{\ell,k}\mathbb{e}_\ell, \quad (\det T = \det(\{\alpha_{\ell,k}\})) \\
&=: \sum_{\ell=1}^{\dim H} \widetilde{\alpha_{\ell,k}}\mathbb{e}_\ell.
\end{aligned}$$

$k > \dim V$ に対しては, $T_\varepsilon \mathbb{e}_k = \sum_{\ell=1}^{\dim H} \widetilde{\alpha_{\ell,k}}\mathbb{e}_\ell$ と書くと, $|\widetilde{\alpha_{\ell,k}}| \lesssim \varepsilon$. 故に, $\det T_\varepsilon \lesssim \varepsilon^{\dim V}$.

次に, 逆の (S) & $(D) \Rightarrow BL_g < \infty$ を示す.
$\mathbb{A} \coloneqq \{A_j\}_{j=1}^m$: Gaussian input とし, $T \coloneqq \sum_{j=1}^m p_j^{-1} B_j^* A_j B_j$ と定める. すると, $0 < T = T^*$ である. 実際, $x, y \in H$ に対して,

$$\begin{aligned}
(Tx, y) &= \sum_{j=1}^m p_j^{-1}(A_j B_j x, B_j y) \ (> 0) \\
&= (x, Ty).
\end{aligned}$$

従って, H のある O.N.S. $\{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H}$ を用いて,

$$T \overset{\{\mathbb{e}_j\}_j}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\dim H} \end{pmatrix} \quad \text{with } 0 < \lambda_{\dim H} \le \cdots \le \lambda_1$$

と表現できる. この $\{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H}$ に対して, Lemma 3.1 を用いると, $I_j \subset \{1, \cdots, \dim H\}$, $(1 \le j \le m)$ で Lemma 3.1 の (i), (ii), (iii), (iv) を満たすものがある.

Claim:

$$\det A_j \lesssim \prod_{i \in I_j} \lambda_i.$$

この claim が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}(\det A_j)^{1/p_j} &\lesssim \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{\dim H}\lambda_i^{p_j^{-1}\ \#\{I_j\cap\{i\}\}}\\ &= \prod_{i=1}^{\dim H}\lambda_i^{\sum_{j=1}^{m}p_j^{-1}\ \#\{I_j\cap\{i\}\}}\\ &= \lambda_1^{\dim H}\prod_{j=1}^{\dim H-1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{\sum_{j=1}^{m}p_j^{-1}\ \#\{I_j\cap\{k+1,\cdots,\dim H\}\}}\\ &\le \lambda_1^{\dim H}\prod_{k=1}^{\dim H-1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{\dim H-k}\\ &= \prod_{k=1}^{\dim H}\lambda_k\\ &= \det T\end{aligned}$$

を得る. 故に, $BL_g \le c < \infty$.

Claim の証明がわからないので, 省略します. わかり次第, 書き加えます.

□

4 Appendices

ここでは, 基本的なことをまとめる.

4.1 Definition of determinant and trace of operators

$\mathbb{e} \coloneqq \{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H} : H$ の 基底をとる. $T : H \to H$: linear に対して,

$$\det T \coloneqq \det M_T \ \&\ \mathrm{tr} T \coloneqq \mathrm{tr} M_T$$

と定める. ただし, M_T は, T の $\{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H}$ による表現行列 である. これらの定義は, 基底の取り方に依存しない.

4.2 Definition of integral on H

$\mathbb{e} \coloneqq \{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H} : H$ の O.N.S. をとる.

$$H \ni x = \sum_{j=1}^{\dim H} x_j \mathbb{e}_j$$

とする. $f : H \to \mathbb{C}$ に対して, (可測性などについては省略)

$$\int_H f dx \coloneqq \int_{\mathbb{R}^{\dim H}} f\left(x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_{\dim H}\mathbb{e}_{\dim H}\right) dx_1 \cdots dx_{\dim H}$$

と定める. この定義が, O.N.S. の取り方に独立であることはすぐに確認できる.

4.3 Definition of derivative on H

$\mathbb{e} \coloneqq \{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H}, \tilde{\mathbb{e}} \coloneqq \{\tilde{\mathbb{e}}_j\}_{j=1}^{\dim H}$ を H の O.N.S. とする. $f : H \to \mathbb{R},\ x \in H,\ h > 0$ に対して,

$$\partial_{\mathbb{e}_j} f(x) \coloneqq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(x + h\mathbb{e}_j) - f(x)\right) \in \mathbb{R} \ \&\ \nabla^{\mathbb{e}} f(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{\dim H}\partial_{\mathbb{e}_j} f(x)\mathbb{e}_j \in H$$

と定める. (と思う.) $\tilde{\mathbb{e}}_j = \sum_{k=1}^{\dim H}\alpha_{j,k}\mathbb{e}_k$ とし, $A \coloneqq \{\alpha_{j,k}\}_{j,k}$ と定めると, $\tilde{\mathbb{e}} = A\mathbb{e}$ と書ける. ところで,

$$\partial_{\tilde{\mathbb{e}}_j} f(x) = (\nabla^{\mathbb{e}} f(x), \tilde{e}_j) = \sum_{k=1}^{\dim H}\alpha_{j,k}\partial_{\mathbb{e}_k} f(x)$$

であるから, $\nabla^{\tilde{\mathbb{e}}} f(x) = A\nabla^{\mathbb{e}} f(x)$.

div については, 通常通り

$$\mathrm{div} f(x) = \mathrm{div}^{\mathbb{e}} f(x) = \sum_{j=1}^{\dim H} \partial_{\mathbb{e}_j} f(x) \in \mathbb{R}$$

と, O.N.S. を決めるごとに定める.(と思う.)

$g : H \to H$ の場合は,

$$\partial_{\mathbb{e}_j} g(x) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x + h\mathbb{e}_j) - g(x)) \in H \ \&\ \mathrm{div} g(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{\dim H} \partial_{\mathbb{e}_j} g(x) \in H.$$

4.4 Fundamental calculus

$\mathbb{e} \coloneqq \{\mathbb{e}_j\}_{j=1}^{\dim H} : H$ の O.N.S. をとる.

Lemma 4.1. *Let $T > 0$ be a linear, self-adjoint operator on H. Then,*

$$\int_H e^{-\pi\|x\|^2} dx = (\det T)^{-1/2}.$$

Proof. T の $\mathbb{e}$ による表現行列は, 仮定より行列式が 1 の直交行列 P により対角化できる. $P^{-1}\mathbb{R}^{\dim H} = \mathbb{R}^{\dim H}$ にも注意すると,

$$\begin{aligned}\int_H e^{-\pi\|x\|^2} dx &= \prod_{j=1}^{\dim H} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\lambda_j t^2} dt, \ (\{\lambda_j\}_{j=1}^{\dim H} : M_T \text{ の固有値 }) \\ &= \prod_{j=1}^{\dim H} \lambda_j^{-1/2} \\ &= (\det T)^{-1/2}.\end{aligned}$$

□

謝辞

セミナーに参加していただいた皆様には, 色々とご指摘いただきました. この場を借りて, 御礼申し上げます.

参考文献

[1] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric aspects of functional analysis (1987-88), 251-260, Lecture Notes in Math., **1376**, Springer, Berlin, 1989.

[2] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), no. 2, 335-361.

[3] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ and T. Tao, *The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*. Geom. Funct. Anal. **17** (2008), no. 5, 1343-1415.

[4] C. Demeter, Fourier restriction, decoupling, and applications. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **184**. Cambridge University Press, Cambridge, 2020. xvi+331 pp.

[5] H. Finner, *A generalization of Hölder's inequality and some probability inequalities*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 4, 1893-1901.

[6] E.H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Invent. Math. **102** (1990), no. 1, 179-208.

[7] L.H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc **55**, (1949). 961-962.