

閉リーマン面上の正則円板束のベルグマン空間と ハーディー空間

足立 真訓 (東京理大・理工)*

種数 2 以上の閉 Riemann 面 Σ を取り, その Fuchs 群 Γ による表示 $\Sigma = \mathbb{D}/\Gamma$ を固定する. ($\mathbb{D}$ で単位円板を表す.) また, 群準同型 $\rho: \Gamma \simeq \pi_1(\Sigma) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{D})$ を取る. このとき, 二重円板 $\mathbb{D}^2$ 上に Γ が $\gamma(z, \zeta) = (\gamma z, \rho(\gamma)\zeta)$ ($\gamma \in \Gamma$) により作用する. $\mathbb{D}^2$ のこの Γ 作用による商空間を $\mathcal{D}_\rho$ で表す. 第一射影により $\mathcal{D}_\rho$ を Σ 上の局所自明な正則 $\mathbb{D}$ 束とみなす. $\mathcal{D}_\rho$ を Σ 上のホロノミー ρ の正則円板束と呼ぶ.

Γ は $\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ にも同様に作用しており, Σ 上の正則 $\mathbb{CP}^1$ 束 $X_\rho := \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1/\Gamma$ が得られる. 正則円板束 $\mathcal{D}_\rho$ は X_ρ 内に Levi 平坦境界を持つ領域として自然に実現される. Diederich–大沢 [5] は, ρ が回転群 $U(1)$ への表現に共役でなければ $\mathcal{D}_\rho$ は 1-凸であり, $\mathcal{D}_\rho$ 上に正則関数が豊富に生息していることを示した. このことから, 正則円板束は関数論を展開し得る Levi 平坦境界の領域の基本的な例と考えられるが, 詳しい解析は未だなされていない. 例えば次の Sidney Frankel による問は未解決である.

問題. 正則円板束 $\mathcal{D}_\rho$ が Liouville (有界正則関数は定数のみ) となる ρ を特徴付けよ.

本発表では, この問題に関連する次の部分的な結果について議論したい:

主結果. 上述の Σ, Γ を考え, ホロノミー ρ として恒等写像 $\rho_0 = id: \Gamma \rightarrow \Gamma$ を取り, 正則円板束 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\rho_0} \subset X_{\rho_0}$ を考える. このとき, (1) Hardy 空間 $A^2_{-1}(\mathcal{D})$ は定数関数のみからなる. (2) 重み付き Bergman 空間 $A^2_\alpha(\mathcal{D})$ は重み $\alpha > -1/2$ のとき無限次元である.

(1) より $\mathcal{D}$ は Liouville であることが分かる. なお, Hardy 空間, 重み付き Bergman 空間は, それぞれ次のノルムが有限となる $\mathcal{D}$ 上の正則関数からなる Hilbert 空間である:

$$\|f\|_{-1}^2 := \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\{r=-\varepsilon\}} |f|^2 dS, \quad \|f\|_\alpha^2 := \int_{\mathcal{D}} |f|^2 |r|^\alpha dV \quad (\alpha > -1).$$

ただし, r は $\mathcal{D}$ の滑らかな定義関数, dV, dS はそれぞれ X_{ρ_0} , レベル集合 $\{r = -\varepsilon\}$ 上の体積測度を表す. (ノルムの有限性は, これらの取り方に依存しない.)

参考文献

- [1] M. Adachi, *A local expression of the Diederich–Fornaess exponent and the exponent of conformal harmonic measures*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **46** (2015), 65–79.
- [2] M. Adachi and J. Brinkschulte, *Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes*, to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble).
- [3] B. Berndtsson and P. Charpentier, *A Sobolev mapping property of the Bergman kernel*, Math. Z. **235** (2000), 1–10.
- [4] J. Cao, M.-C. Shaw, and L. Wang, *Estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem and nonexistence of C^2 Levi-flat hypersurfaces in $\mathbb{CP}^n$* , Math. Z. **248** (2004), 183–221.
- [5] K. Diederich and T. Ohsawa, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 819–833.
- [6] R. Feres and A. Zeghib, *Leafwise holomorphic functions*, Proc. A.M.S. **131** (2003), 1717–1725.
- [7] L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J.F.A. **51** (1983), 285–311.

本研究発表は科研費 (課題番号: 26800057) の助成を受けたものである.

* e-mail: adachi_masanori@ma.noda.tus.ac.jp