複素関数論宿題（8）解答例

問題　Weierstrass の $\wp$ 関数の加法定理

$$\wp(z_1+z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\Big)^2$$

は $z_1 = z_2$ のときにはどんな形になるか？

（解答例）

$\wp(z)$ は加群 $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ を周期とする $\wp$ 関数とする．$\wp'(z)$ が奇函数であることと，周期が L であることから，基本領域内に 3 つの零点 $\dfrac{\omega_1}{2}$，$\dfrac{\omega_2}{2}$，$\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ をもつ．$\wp'(z)$ は位数 3 の楕円関数であるから，基本領域における零点はこの 3 つのみである．

よって $2z \notin L$ ならば z は $\wp'(z)$ の極でも零点でもないことに注意する．

上の加法定理において z_1 を $2z_1 \notin L$ となるようにとって固定する． $z_2 \to z_1$ としたときの極限をとると

$$\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)} = \frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{z_2-z_1}\frac{z_2-z_1}{\wp(z_2)-\wp(z_1)} \quad \to \quad \frac{\wp''(z_1)}{\wp'(z_1)}$$

となる．これより（z_1 を z と書きなおして）

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\frac{\wp''(z)^2}{\wp'(z)^2}$$

が得られる．

このままでもよいが，右辺は $\wp(z)$ だけで表わすことができる．$\wp(z)$ は微分方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

を満たす．また，この両辺を微分すると

$$2\wp'(z)\wp''(z) = (12\wp(z)^2 - g_2)\wp'(z)$$

したがって

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}$$

が得られる．よって

$$\begin{aligned}\wp(2z) &= -2\wp(z) + \frac{1}{4}\,\frac{(6\wp(z)^2 - g_2/2)^2}{4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3} \\ &= \frac{\wp(z)^4 + \dfrac{1}{2}g_2\wp(z)^2 + 2g_3\wp(z) + \dfrac{1}{16}{g_2}^2}{4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3}\end{aligned}$$

（注） $\wp(z)$ が $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ を周期とする $\wp$ 関数とすると，$4\wp(2z)$ は $\dfrac{\omega_1}{2}\mathbb{Z} + \dfrac{\omega_2}{2}\mathbb{Z}$ を周期とする $\wp$ 関数である．