

複素関数論宿題 (7) 解答例

問題 $\wp(z)$ を $L = \{n_1 + n_2i \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ を周期とする Weierstrass の $\wp$ 関数とする.

(1) $\wp(iz) = -\wp(z)$ であることを示せ.

(2) $\wp(z)$ の零点を求めよ.

(解答例) (1)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L'} \left\{ \frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right\}$$

である. ここで $L' = L - \{0\}$ とした.

$\wp(z)$ は L を周期とする楕円関数で, 0 の周りのローラン展開は

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + \cdots$$

の形である.

$u \in L$ ならば $iu \in L$ であり, $\wp(i(z+u)) = \wp(iz+iu) = \wp(iz)$ が成り立つ. よって $\wp(iz)$ もまた L を周期とする楕円関数である. また, 0 の周りのローラン展開は

$$\wp(z) = \frac{1}{(iz)^2} + c_2(iz)^2 + \cdots = -\frac{1}{z^2} - c_2 z^2 + \cdots.$$

である.

$f(z) = \wp(z) + \wp(iz)$ とおくと 0 は $f(z)$ の除去可能特異点で $f(0) = 0$ とすると 0 において正則に拡張できる. 周期性により f は全平面で正則な関数に拡張でき, (リューヴィルの第一定理により) 定数である. $f(0) = 0$ だから $f(z)$ は恒等的に 0 である. よって $\wp(iz) = -\wp(z)$.

(2) $a = \frac{1+i}{2}$ とおくと $ia = a - 1$ が成り立つ.

$$\wp(a) = \wp(a-1) = \wp(ia) = -\wp(a)$$

だから $\wp(a) = 0$ である. また

$$\wp'(a) = \wp'(a-1-i) = \wp'(-a) = -\wp'(a)$$

だから $\wp'(a) = 0$ で, a は $\wp(z)$ の 2 位以上の零点である. $\wp(z)$ は 2 位の楕円関数だから, 基本周期平行四辺形 $\Delta = \{t_1 + t_2i \mid t_1, t_2 \in [0, 1)\}$ に属する $\wp(z)$ の零点の位数の和は 2 なので, a は 2 位の零点であり Δ には a 以外の零点はない.

$\mathbb{C}$ における $\wp(z)$ の零点は L を法として a に合同な点全体, すなわち $(n_1 + \frac{1}{2}) + (n_2 + \frac{1}{2})i$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$) である.