複素関数論宿題（6）解答例

問題 全平面 $\mathbb{C}$ で有理型な関数で次の主要部分布をもつものをつくれ．

(1) $\dfrac{1}{z-n^2}$, $n=1,2,\ldots$　　(2) $\dfrac{1}{z-\sqrt{n}}$, $n=1,2,\ldots$

解答例

以下では $\Delta(0,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ で 0 を中心とする半径 R の開円板を表わす．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n^2}$ が収束することを示そう．

R を正数とする．$z\in\Delta(0,R)$ かつ $2R<n^2$ のとき，

$$|z-n^2|\geq n^2-|z|>n^2-R>\frac{n^2}{2}$$

だから $\left|\dfrac{1}{z-n^2}\right|\leq\dfrac{2}{n^2}$ が成り立つ．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ が収束するから，(ワイエルシュトラスの M 判定法により，）$\Delta(0,R)$ において級数 $\displaystyle\sum_{n^2>2R}\frac{1}{z-n^2}$ は一様収束する．その和は（正則関数列の一様収束の極限だから）正則である．

$\displaystyle\sum_{n^2\leq 2R}\frac{1}{z-n^2}$ は有理関数で，$\Delta(0,R)$ で与えられた主要部をもっている．したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n^2}$$

は $\Delta(0,R)$ では与えられた主要部をもつ有理型関数である．

このことが任意の $R>0$ について成り立つから，この級数は全平面で与えられた主要部をもつ有理型を定めている．

(2) $\dfrac{1}{z-\sqrt{n}}$ を 0 を中心とする巾級数に展開すると

$$\frac{1}{z-\sqrt{n}}=-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1-\frac{z}{\sqrt{n}}}=-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{z}{n}-\frac{z^2}{\sqrt{n}^3}-\cdots,\quad z\in\Delta(0,\sqrt{n})$$

となる．そこで $\dfrac{1}{z-\sqrt{n}}$ に修正項を加えた

$$\frac{1}{z-\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{z}{n}=\frac{z^2}{n(z-\sqrt{n})}$$

を考える．

R を正数とする．$z\in\Delta(0,R)$ かつ $2R<\sqrt{n}$ のとき，

$$|z-\sqrt{n}|\geq\sqrt{n}-|z|>\sqrt{n}-R>\frac{\sqrt{n}}{2}$$

だから

$$\left|\frac{z^2}{n(z-\sqrt{n})}\right| < \frac{R^2}{n\cdot\sqrt{n}/2} = \frac{2R^2}{n^{3/2}}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R^2}{n^{3/2}}$ が収束するから，$\Delta(0,R)$ において級数

$$\sum_{\sqrt{n}>2R}\left\{\frac{1}{z-\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{z}{n}\right\}$$

は一様収束し，その和は正則である．

$\displaystyle\sum_{\sqrt{n}\leq 2R}\left\{\frac{1}{z-\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{z}{n}\right\}$ は有理関数で，$\Delta(0,R)$ で与えられた主要部をもっている．したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{z}{n}\right\}$$

は $\Delta(0,R)$ では与えられた主要部をもつ有理型関数である．

このことが任意の $R>0$ について成り立つから，この級数は全平面で与えられた主要部をもつ有理型関数を定めている．

（注）　$f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n^2}$ は三角関数を用いて表示できます．考えてみてください（ヒント： まず $f(z^2)$ について考える.）