複素関数論宿題（５）補足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$ について

（補足１）広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が収束するとは，$\displaystyle\lim_{R\to\infty,\, L\to-\infty}\int_L^R f(x)dx = A$ が存在することをいう．

（正確に言えば，この広義積分が存在してその値が A であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$M>0$ がとれて，$L<-M,\, M<R$ ならば $\left|\displaystyle\int_L^R f(x)dx - A\right| < \varepsilon$ とできることである．）

これは，$\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx,\ \int_0^\infty f(x)dx$ がともに存在することと同値である．

一般に，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx$ が存在しても広義積分が存在するとは限らない（例えば $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ \sin x$）から，この点について注意しなくてはならない．

この問題では，被積分関数が正値だから，$A=\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx$ が存在すれば，$\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx,\ \int_0^\infty f(x)dx$ がともに存在し，したがって広義積分の値は A であるといってもよい．

あるいは，証明において，長方形 D_R の代わりに

$$D_{L,R} := \{z\in\mathbb{C} \mid L<\Re(z)<R,\ 0<\Im(z)<2\pi\} \quad (L<0<R)$$

の周上の線積分を考えてもよい．

（補足２） 問題では $0<a<1$ という条件をつけていたので a は実数と見なしていた．a が複素数としても $0<\mathrm{Re}\, a<1$ ならば上の結果は正しい．証明をどう補えばよいだろうか？ また特に $a=1/2+is,\ s\in\mathbb{R}$ とすると何が得られるだろうか？

（補足３） 上の広義積分において変数変換 $t=e^x$ を行えば

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t+1}dt$$

という形になる．（これから留数を用いて計算してもよい．この方法は多くの教科書にある．）

さらに $t=u/(1-u)\quad(0<u<1)$ で変数変換すれば

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-a}du$$

となる．これは $B(a,1-a)$ に等しい．ただし

$$B(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \quad (p,q>0)$$

はベータ関数を表わす．さらに，ベータ関数とガンマ関数の関係

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を用いると，この宿題の結果から

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad (0<a<1)$$

が得られる．

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi}=\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(1-z)}$$

これは $0,\pm1,\pm2,\ldots$ に零点をもつ整関数 $\frac{\sin(\pi z)}{\pi}$ が，$0,1,2\ldots$ に零点をもつ整関数 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ と，$-1,-2,\ldots$ に零点をもつ整関数 $\frac{1}{\Gamma(1-z)}$ の積に分解できることを示している．