複素関数論宿題（５）解答例

問題

$0 < a < 1$ のとき，次の値を求めよ；

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\mathrm{d}x.$$

解答例

《 広義積分が絶対収束すること 》

$\delta > 0$ を，$\delta \leq a \leq 1-\delta$ であるように選ぶ．

$$\left|\frac{e^{ax}}{e^x+1}\right| \leq \begin{cases} \frac{e^{ax}}{e^x} \quad = e^{-(1-a)x} & (x \geq 0) \\ e^{ax} & (x \leq 0) \end{cases} \quad \text{であるから，} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{ax}}{e^x+1}\right| \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta|x|}\mathrm{d}x = \frac{2}{\delta}$$

となって広義積分は絶対収束する．従って，

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x+1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

と計算して良い．（この値を I と置く．）

《 函数と積分経路の定義 》

$\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f を，$f(z) := \frac{e^{az}}{e^z+1}$ と置く．R を十分大きくとり（$e^R > 2$ であれば良い），次のような長方形領域

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid -R < \Re(z) < R,\ 0 < \Im(z) < 2\pi\}$$

を考え，経路 $C_R := \partial(D_R) \subset \mathbb{C}$ での積分を考える．C_R には反時計回りの向きを入れる．各線分 $[-R,\ R]$, $[R,\ R+2\pi i]$, $[R+2\pi i,\ -R+2\pi i]$ および $[-R+2\pi i,\ -R]$ 上での f の積分をそれぞれ $I_{1,R}$, $I_{2,R}$, $I_{3,R}$, $I_{4,R}$ とする．

《 実軸に直交する線分での積分》

$I_{2,R}$ と $I_{4,R}$ が $R \to +\infty$ のときに 0 に収束することを示したい．

- $\Re(z) = R$ のとき，

$$|f(z)| \leq \frac{e^{aR}}{e^R-1} \leq \frac{2e^{aR}}{e^R} \leq 2e^{-\delta R} \quad \text{なので，}$$

$$|I_{2,R}| = \left|\int_0^{2\pi} f(R+iy)\ i\mathrm{d}y\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(R+iy)|\,\mathrm{d}y \leq 4\pi e^{-\delta R} \to 0 \qquad (R \to +\infty).$$

- $\Re(z) = -R$ のとき，

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \leq 2e^{-\delta R} \quad \text{なので，同様に}$$

$$|I_{4,R}| = \left|\int_{2\pi}^0 f(-R+iy)\ i\mathrm{d}y\right| \leq 4\pi e^{-\delta R} \to 0 \qquad (R \to +\infty).$$

《 虚軸に直交する線分での積分 》

$\lim_{R\to+\infty} I_{1,R} = I$ であるから，$I_{3,R}$ を，$I_{1,R}$ を用いて表す．C_R に入っている向きに注意すると，

$$I_{3,R} = \int_{+R}^{-R} f(x+2\pi i)\mathrm{d}x = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{2\pi ai}}{e^x+1}\mathrm{d}x = -e^{2\pi ai} I_{1,R} \qquad \text{である．}$$

以上と (1) より，

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z &= (1-e^{2\pi ai})I_{1,R} + I_{2,R} + I_{4,R} \\ \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z &= (1-e^{2\pi ai})I. \end{aligned} \tag{2}$$

《 留数の計算 》

$\overline{D_R}$ において，e^z+1 の零点は $z=\pi i$ のみで，重複度は 1 である．e^{az} は零点を持たないから，$f(z)$ は 1 位の極 $z=\pi i$ を持ち，他の点では正則．その点での留数を求めたい．$w := z-\pi i$ と置く．

$$\begin{aligned} e^z+1 &= -e^{z-\pi i}+1 = -e^w+1 \\ &= -\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots\right)+1 \\ &= -\left(w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots\right) \qquad \text{であることを用いると，} \\ \mathrm{Res}(f;\pi i) &= \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z) = \lim_{w\to 0} wf(w+\pi i) \\ &= \lim_{w\to 0}\frac{we^{a(w+\pi i)}}{-e^w+1} \\ &= \lim_{w\to 0}\frac{we^{a(w+\pi i)}}{-\left(w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots\right)} \\ &= \lim_{w\to 0}\frac{e^{a(w+\pi i)}}{-\left(1+\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{3!}+\dots\right)} \\ &= -e^{\pi ai}. \end{aligned}$$

（注）次のようにしてもよい：$\mathrm{Res}(f;\pi i) = \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z) = \lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{e^z+1}e^{az} = \left.\frac{e^{az}}{(e^z+1)'}\right|_{z=\pi i} = -e^{\pi ai}$.

一般に次が成り立つ：$g,\ h$ が点 z_0 の近傍で正則な函数で $g(z_0)\neq 0,\ h(z_0)=0,\ h'(z_0)\neq 0$ ならば，z_0 は g/h の 1 位の極で

$$\mathrm{Res}(\frac{g}{h};z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)-h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

留数定理より，

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f;\pi i) = -2\pi i e^{\pi ai} \tag{3}$$

《 結論 》

(2) と (3) より，

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{1-e^{2\pi ai}}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z &= \frac{-2\pi i e^{\pi ai}}{1-e^{2\pi ai}} \\ &= \frac{-2\pi i}{e^{-\pi ai}-e^{\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad . \end{aligned}$$

（TA ： 福本佳泰）