複素関数論宿題（４）解答例

問題

(1)　有理型関数 $\cot z$ の 0 の周りのローラン展開の最初の 3 項を求めよ．

(2)　有理型関数 $f(z) = \left(\dfrac{1}{z-a} - \dfrac{1}{z}\right)\pi\cot(\pi z)$ の極およびそこでの留数を求めよ．ただし $a \notin \mathbb{Z}$ とする．

解答例

(1) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = i\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$ で, $\sin z$ は 0 で 1 位の零点をもち，$\cos 0 = 1 \neq 0$ だから，$\cot z$ は 0 で 1 位の極をもつ．また $\cot z$ は奇関数だからローラン展開は奇数べきの項のみからなる．よって $\cot z$ の 0 の周りのローラン展開は $\cot z = \dfrac{c_{-1}}{z} + c_1 z + c_3 z^3 + \cdots$ の形である．$\sin z \cdot \cot z = \cos z$ より

$$(z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \cdots)(\frac{c_{-1}}{z} + c_1 z + c_3 z^3 + \cdots.) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \cdots$$

この左辺を展開して係数を比較すれば

$$c_{-1} = 1, \quad c_1 - \frac{c_{-1}}{6} = -\frac{1}{2}, \quad c_3 - \frac{c_1}{6} + \frac{c_{-1}}{120} = \frac{1}{24}$$

これより $c_{-1} = 1, \quad c_1 = -\dfrac{1}{3}, \quad c_3 = -\dfrac{1}{45}.$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \cdots$$

（注）　授業で示した巾級数の割り算は実質的にこの未定係数法と同じことをしている．

(2) 関数 f は全平面から点 a および $\mathbb{Z}$ を除いたところで正則である．a および $n \in \mathbb{Z}$ の周りのローラン展開の主要部を調べる．

（ア） a の近傍で，f は

$$f(z) = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z-a} + (\text{正則関数}) = \frac{\pi\cot(\pi a)}{z-a} + (\text{正則関数})$$

となっている．

$a \neq n + 1/2$ $(n \in \mathbb{Z})$ のときは $\cot(\pi a) \neq 0$ だから，a は f の 1 位の極であり，$\mathrm{Res}(f, a) = \pi\cot(\pi a)$.

$a = n + 1/2$ $(n \in \mathbb{Z})$ のときは $\cot(\pi a) = 0$ だから，a は f の除去可能特異点である．

（イ）0 の近傍では $\pi\cot(\pi z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{\pi^2}{3}z - \cdots$ だから

$$f(z) = \Big(-\frac{1}{z} - \frac{1}{a} + O(z)\Big)\Big(\frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3}z + O(z^2)\Big) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{a} + O(1).$$

したがって 0 は f の 2 位の極で $\mathrm{Res}(f, 0) = -\dfrac{1}{a}$

（ウ）$n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ では $\pi\cot(\pi z)$ の主要部は $\dfrac{1}{z-n}$ である（$\cot(\pi z)$ が周期 1 をもつから）．n は f の 1 位の極で $\mathrm{Res}(f, n) = \dfrac{1}{n-a} - \dfrac{1}{n}$.

（注１）ベルヌイ数 B_n を $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}z^n$ によって定める．

$B_0 = 1,\ B_1 = -\dfrac{1}{2},\ B_2 = \dfrac{1}{6},\ B_4 = -\dfrac{1}{30}, \ldots;$ n が奇数 ≥ 3 のとき $B_n = 0$.

これを用いると

$$\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{iz}{2}\coth\frac{iz}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$$

（ここで $(-1)^{k-1}B_{2k} > 0,\quad k = 1, 2, \ldots$ である．）

（注２）N を正整数として， 正方形 $D_N = \{z \in \mathbb{C} \mid |\,\mathrm{Re}\,z|, |\,\mathrm{Im}\,z| < N + \frac{1}{2}\}$ を考え，その境界を C_N とする．D_N が a を含むとき，留数定理により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} f(z)dz &= \mathrm{Res}(f, a) + \mathrm{Res}(f, 0) + \sum_{n=1}^{N}\Big(\mathrm{Res}(f, n) + \mathrm{Res}(f, -n)\Big) \\ &= \pi\cot(\pi a) - \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{n}\Big)\end{aligned}$$

（a が除去可能特異点のときは留数が 0 とみなしている．）

$N \to \infty$ のとき左辺の線積分は 0 に収束する（証明省略）．これより

$$\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)$$

が得られる．