複素関数論宿題（２）

問題

(1) 整関数 $\sin z$ を $x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z$ の関数として表わせ．

(2) 複素平面上で $\mathrm{Im}\ \sin z > 0$ となる範囲を図示せよ．

(3) 複素平面上で $|\sin z| \leq 1$ となる範囲を図示せよ．

解答例

(1) $\quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (z = x + iy)$

これを示すにはいろいろな方法が考えられる．また $\sin z$ をどのように定義するかによる．

(a) 複素指数関数を

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

で，cos, sin を

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

で定義するなら，次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + iy) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) \\
&= \frac{1}{2i}\left\{(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \sin x + i\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \cos x \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.
\end{aligned}$$

(b) e^z, $\cos z$, $\sin z$ を全平面で収束する巾級数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

によって定義してもよい.（z が実数のときにはこれらは通常の指数関数，三角関数に一致する.）
複素変数の場合にも加法定理

(*) $\quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

が成り立つことを認めれば（注を参照）次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + iy) \\
&= \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.
\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{Im}\,\sin z = \cos x \sinh y$ だから

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} \sin z > 0\} = \left\{x + iy \,\middle|\, \cos x \sinh y > 0\right\}$$

これは $\{|x - 2n\pi| < \pi/2,\ y > 0\}$,　$\{|x - (2n+1)\pi| < \pi/2,\ y > 0\}$　$(n \in \mathbb{Z})$ の合併集合.

(3)　$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$

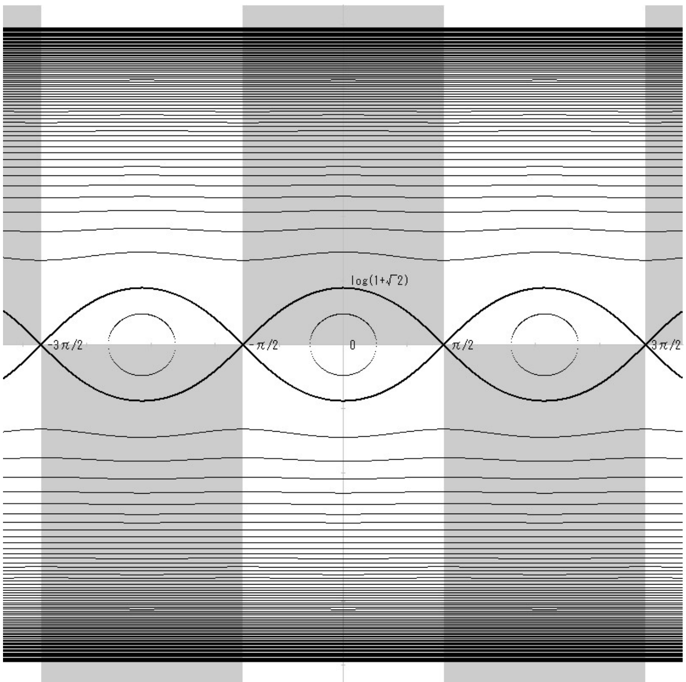
であるが,　$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,　$\cosh^2 x - \sinh^2 y = 1$　を用いると

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y - \cos^2 x + 1.$$

が得られる．よって

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C} \mid |\sin z| \le 1\} &= \left\{x + iy \,\middle|\, |\sinh y| \le |\cos x|\right\} \\ &= \left\{x + iy \,\middle|\, |y| \le \sinh^{-1} |\cos x|\right\}\end{aligned}$$

この境界は曲線 $y = \pm \sinh^{-1}(\cos x)$ からなっている．$\sinh^{-1} t = \log(t + \sqrt{t^2 + 1})$ は t の狭義増加関数だから，$\sinh^{-1}(\cos x)$ は $\cos x$ と増減を共にする．また $\sinh^{-1}(-t) = -\sinh^{-1}(t)$, $\sinh^{-1}(\pm 1) = \pm \log(1 + \sqrt{2})$ に注意する．



図で灰色の部分が $\mathrm{Im} \sin z > 0$．太線が $|\sin z| = 1$ の等高線．$(n + 1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ において等高線の 2 つの分枝が直交していることに注意する．

注　正弦関数の加法定理 (*) が，$z_{,} z_2$ が実数のとき成り立つことを既知として複素数のときにも成り立つことを示そう．そのために次の命題を利用する．

命題　整関数 (全平面で正則な関数) f, g が実軸上で一致するならば全平面で恒等的に一致する．

（証明）これは「一致の定理」の特別の場合だが，この場合に即した証明をする．$f(z)-g(z)$ は全平面で収束する巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_z^n$ で表わせる．ここで，係数 c_n は f, g の（実変数関数としての）n 次導関数によって $(f^{(n)}(0)-g^{(n)}(0))/n!$ で与えられるが $f(z)-g(z)$ が実軸上で恒等的に 0 だから c_n はすべて 0 である．したがって $f(z)$ と $g(z)$ は全平面で一致する．

（加法定理 (*) の証明）: $f(z_1, z_2) = \sin(z_1 + z_2)$, $g(z_1, z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \cos z_2$ とおく．

（ア） z_1, z_2 がともに実数のとき $f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)$ が成り立つ．

（イ） z_2 を実数定数として，$f(z_1, z_2)$, $g(z_1, z_2)$ を複素変数 z_1 の整関数とみなす．等式 (*) は，（ア）により，z_1 が実数のとき成り立つから，上の命題により，z_1 が任意の複素数のときにも成り立つ．すなわち $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{R}$ のとき (*) は成り立つ．

（ウ） z_1 を複素数定数として，$f(z_1, z_2)$, $g(z_1, z_2)$ を，複素変数 z_2 の整関数とみなす．等式 (*) は,（イ）により z_2 が実数のとき成り立つから，上の命題より z_2 が任意の複素数のときにも成り立つ．したがって (*) は任意の複素数 z_1 z_2 について成り立つ．

一致の定理　複素平面の領域 Ω で正則な関数 f, g があって，これらの関数の値が一致する点からなる集合 $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ が Ω 内に集積点をもつとする．このとき Ω で f と g は恒等的に一致する．

（証明） f が Ω で正則で，その零点が Ω の内部に集積点をもてば f が恒等的に 0 となることを示せばよい．

a を Ω 内の点とすると f は a のある近傍 $\Delta(a, r)$ で a を中心とする巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ で表わせる．この巾級数の係数のうち 0 でないものがあれば 0 でない最初の係数を c_m として

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^m + \cdots = (z-a)^m g(z)$$

と表わせる．ここで $g(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \cdots$ は $\Delta(a, r)$ で正則で $g(a) = c_m \neq 0$. $g(z)$ は連続だから a のある近傍 $\Delta(a, r_0)$ の上で零点をもたない．したがって $f(z)$ は $0 < |z-a| < r_0$ で零点をもたない．

これより，$E = \{a \in \Omega \mid f$ は a のある近傍で恒等的に $0\}$ とおくと E も $\Omega \setminus E$ も開集合である．

Ω 内に f の零点の集積点があれば，それは E に属し，E は空ではない．Ω が連結だから $E = \Omega$ である．