複素関数論宿題 1

【問題】　留数を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$ を計算せよ．

【解答例】 まず，

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}\right| \leq \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4} \leq \frac{1}{3}$$

より，求める広義積分が絶対収束していることに注意する．したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$$

と計算して良い．

$R > 2$ に対して，$\mathbb{C}$ 内の曲線 C_R を

$$C_R = C_R^+ \cup [-R, R] \quad ただし \quad C_R^+ := \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, \pi]\}$$

と定める．C_R には反時計回りの向きを入れる．また

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$$

とおく． $f(z)$ は C_R の内部においては，$z = 2i$ で 2 位の極を持ち，他のすべての点で正則である．

まず，C_R^+ での f の積分が $R \to +\infty$ のときに 0 に収束することを示したい．

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\,\mathrm{d}(Re^{i\theta})\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\theta})\right| R\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2-4)^2} \cdot R\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi R}{(R^2-4)^2} \to 0 \quad (R \to +\infty).
\end{aligned}$$

次に，$z = 2i$ における留数 $\mathrm{Res}_{2i}[f]$ を求めたい．$w := z - 2i$ と置く．

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{w^2(w+4i)^2} \\
&= \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{4i(1+\frac{w}{4i})}\right)^2 \\
&= \frac{1}{w^2}\frac{-1}{16}\left(1 + \left(-\frac{w}{4i}\right) + \left(-\frac{w}{4i}\right)^2 + \dots\right)^2 \qquad (|w| < 4 \text{ の範囲で絶対収束}) \\
&= \frac{1}{w^2}\frac{-1}{16}\left(1 - \frac{2w}{4i} + \dots\right) \\
&= \frac{-1}{16}w^{-2} + \frac{1}{32i}w^{-1} + \dots
\end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Res}_{2i}[f] = \frac{1}{32i}$ と分かる．留数定理を用いると

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{2i}[f] = \frac{\pi}{16}.$$

以上より，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\pi}{16} - \int_{C_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

（TA： 福本佳泰）