

複素関数論中間試験 解答例 (上田) 2016 年

- 1 留数を用いて次の広義積分の値を求めよ．ここで a は正実数とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+1)^2} dx.$$

(解答例) $f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z^2+1)^2}$ とおく． $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で，その極は $\pm i$ にある．

- ・ 実軸上で $|f(x)| = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ である． $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ が収束するから，問題の広義積分は収束する．この値は $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ で与えられる．
- ・ $\mathbb{C}$ の領域

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\} \quad (R > 1)$$

を考える． D_R の境界は $\partial D_R = I_R + C_R$ と表わせる．ここで I_R は実軸上の区間 $-R \leq x \leq R$ を， C_R は半径 R の半円周 $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を表す．境界には D を左に見る向きがついているとする．このとき，留数定理により

$$\int_{I_R} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

が成り立つ．

- ・ $z \in C_R$ のとき， $|e^{iaz}| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-a \operatorname{Im} z} \leq 1$ だから

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z^2+1|^2} \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}.$$

したがって

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

これは $R \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する．よって

$$\int_{I_R} f(x) dx \rightarrow 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) \quad (R \rightarrow \infty).$$

- ・ $\operatorname{Res}(f, i)$ を求めるために

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \quad \text{ただし} \quad g(z) = \frac{e^{iaz}}{(z+i)^2} = c_0 + c_1(z-i) + \cdots$$

とすると， $f(z)$ の i を中心とするローラン展開は

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-i)^2} + \frac{c_1}{z-i} + \cdots$$

となる．よって $\operatorname{Res}(f, i) = c_1 = g'(i)$ である．

$$g'(z) = \frac{iae^{iaz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{iaz}}{(z+i)^3} = \frac{(ia(z+i)-2)e^{iaz}}{(z+i)^3}$$

より

$$\operatorname{Res}(f, i) = g'(i) = \frac{(a+1)e^{-a}}{4i}.$$

求める広義積分の値は $2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2}(a+1)e^{-a}$ である．

- 2 全平面で有理型な関数 $f(z)$ で, $n = 1, 2, \dots$ に極をもち, n における主要部が $\frac{n}{z-n}$ であるものをつくれ.

(解答例) $n/(z-n)$ は $z \in \Delta(0, n)$ で

$$\frac{n}{z-n} = -\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -1 - \frac{z}{n} - \frac{z^2}{n^2} - \dots,$$

とべき級数展開されることに注意する.

級数

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{z-n} + 1 + \frac{z}{n} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n(z-n)}$$

が求める有理型関数 (のひとつ) であることを以下に示そう.

正数 R を固定する, $n > 2R$ のとき, $\Delta(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ において, $|z-n| > \frac{n}{2}$ だから

$$\left| \frac{n}{z-n} + 1 + \frac{z}{n} \right| = \frac{|z|^2}{n|z-n|} \leq \frac{2R^2}{n^2}$$

が成り立つ. $\sum_{n>2R} \frac{2R^2}{n^2}$ が収束するから, Weirstrass の M 判定法により

$$\sum_{n>2R} \left\{ \frac{n}{z-n} + 1 + \frac{z}{n} \right\}$$

は $\Delta(0, R)$ において一様収束し, そこで正則関数を定める. また,

$$\sum_{n \leq 2R} \left\{ \frac{n}{z-n} + 1 + \frac{z}{n} \right\}$$

は有理関数であり, $\Delta(0, R)$ では与えられた主要部をもつ. したがって $(*)$ は $\Delta(0, R)$ で与えられた主要部をもつ有理型関数である. これが任意の R について成り立つから $(*)$ によって定まる関数は題意をみたす.

- 3 次の整関数を考える:

$$f(z) = z - 2 + e^{-z}.$$

- (1) 虚軸 $\operatorname{Re}(z) = 0$ 上に $f(z)$ の零点がないことを示せ.
 (2) 右半平面 $\operatorname{Re}(z) > 0$ に $f(z)$ の零点がちょうど1個あることを示せ.

(解答例) (1) $z = iy$ が虚軸上にあるとき,

$$f(iy) = iy - 2 + e^{-iy} = -2 + \cos y + i(y - \sin y)$$

だから $\operatorname{Re} f(iy) = -2 + \cos y \leq -1$. よって, $f(z)$ は虚軸上に零点をもたない.

- (2) $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$ とおく. また $g(z) = z - 2$, $h(z) = e^{-z}$ とおく.

$$|z| = R, \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ のとき } |g(z)| \geq |z| - 2 \geq R - 2, \quad |h(z)| < 1$$

$$\operatorname{Re} z = 0 \text{ のとき } |g(z)| \geq |\operatorname{Re} g(z)| = 2, \quad |h(z)| = 1$$

よって $R > 3$ ならば, ∂D_R 上で $|g(z)| > |h(z)|$ が成り立つ. ルーシェの定理により, D_R 内にある $f(z)$ の零点の重複度の和は $g(z)$ の零点の重複度の和と一致する. したがって 1 である. これが 3 以上の任意の R について成り立つから, 右平面内にある f の零点の個数は 1 である.

(別解) $z = x + iy$ ($x > 0, y \in \mathbb{R}$) とすると

$$f(z) = (x - 2 + e^{-x} \cos y) + i(y - e^{-x} \sin y)$$

$y \neq 0$ のとき $|\sin y| < |y|$ で, $e^{-x} < 1$ だから, 右半平面では実軸上以外には $f(z)$ の零点はない. 実軸の正の部分に (重複度 1 の) 零点をもつことは容易に確かめられる.

4 $f(z)$ は $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ において定義され, そこで

$$f(2z) = f(z)$$

を満たす正則関数とする. $f(z)$ は定数であることを示せ.

(解答例 1)

$f(z)$ は $z = 0$ を中心とするローラン級数で表すことができる:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

このとき

$$f(2z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

ローラン展開が一意的であることから

$$c_n = 2^n c_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

よって $n \neq 0$ のとき $c_n = 0$. したがって $f(z)$ は定数である.

(解答例 2)

$E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ とおく. $|f(z)|$ は有界閉集合 E 上で連続だから, そこで最大値をとる. すなわち, $z_0 \in E$ がとれて, 任意の $z \in E$ に対して $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ が成り立つ.

任意の $z \in \mathbb{C}^*$ に対して, $2^n z \in E$ となる整数 n がとれて, $|f(z)| = |f(2^n z)| \leq |f(z_0)|$ が成り立つから $|f(z)|$ は $\mathbb{C}^*$ 全体での $|f(z)|$ の最大値でもある. 正則関数に関する最大 (絶対) 値の原理により, $f(z)$ は定数である.

(次のように論じてよい: $f(z)$ が $\mathbb{C}^*$ で有界だから, 0 は $f(z)$ の除去可能特異点であり, $\mathbb{C}$ で正則な関数に拡張される. さらに (有界整関数に関する) リューヴィルの定理により $f(z)$ は定数である.)