

演習解答例

1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_1^R \frac{\log x}{x^2} dx &= \int_1^R \left\{ -\frac{1}{x} \right\}' \log x dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{x} \log x \right]_1^R + \int_1^R \frac{dx}{x^2} \\
 &= \frac{\log R}{R} - \frac{1}{R} + 1 \rightarrow 1 \quad (R \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

よって求める広義積分の値は 1.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^R \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} &= \frac{1}{b^2 - a^2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left[ \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} \right]_0^R \\
 &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{R}{a} - \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{R}{b} \right) \\
 &\rightarrow \frac{\pi}{2ab(a+b)} \quad (R \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

これが求める広義積分の値である.

2 次の広義積分が収束することを示せ :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3} + x^{7/5}}$$

(解答例)  $f(x) = \frac{1}{x^{1/3} + x^{7/5}}$  とおく.

$x > 0$  のとき  $f(x) < 1/x^{1/3}$  および  $f(x) < x^{7/5}$  が成り立つことに注意する.

まず  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$  が収束するから  $\int_0^1 f(x)dx$  は収束する. また  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{7/5}}$  が収束するから  $\int_1^\infty f(x)dx$  は収束する. したがって与えられた広義積分は収束する.

3 次の関数は与えられた区間において一様連続ではないことを示せ :

$$(1) \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1]$$

(解答例)  $x_n = 1/((2n + \frac{1}{2})\pi)$ ,  $x'_n = 1/((2n - \frac{1}{2})\pi)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおくと  $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であり, また任意の  $n$  について  $f(x_n) - f(x'_n) = 1$ .

したがって, どんな  $\delta > 0$  を考えても  $|x - x'| < \delta$  かつ  $|f(x) - f(x')| > 1$  をみたす 2 点  $x, x' \in (0, 1]$  を見出すことができる. よって  $f(x)$  は  $(0, 1]$  において一様連続ではない.

$$(2) \quad f(x) = x^2, \quad x \in [0, \infty)$$

(解答例) 任意の正数  $\delta$  が与えられたとする.  $x = \frac{1}{\delta}$ ,  $x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$  とおくと,  $|x - x'| < \delta$  かつ  $|f(x) - f(x')| = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1$  が成り立つ. よって  $f(x)$  は  $[0, \infty)$  において一様連続ではない.

□4  $f(x)$  は区間  $I$  で微分可能な関数で, 導関数  $f'(x)$  が有界とする. このとき  $f(x)$  は  $I$  で一様連続であることを示せ

(解答例) 導関数  $f'(x)$  が有界だから, 実数  $M$  を, すべての  $x \in \mathbf{R}$  において  $|f'(x)| \leq M$  となるようにとれる. 平均値定理より, 任意の 2 点  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  に対して,  $\xi$  ( $x \leq x'$ ) を  $f(x') - f(x) = f'(\xi)(x' - x)$  が成り立つようにとれる. したがって, 任意の  $x', x \in \mathbf{R}$  に対して  $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|$  が成り立つ.

任意の  $\varepsilon > 0$  が与えられたとする. この  $\varepsilon$  に対して,  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  と定めれば,  $|x' - x| < \delta$  のとき  $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x| < M\delta = \varepsilon$  となる.

しおたがって  $f(x)$  が  $\mathbf{R}$  で一様連続である.