

1. 一様連続性

定義 $f(x)$ を $\mathbf{R}$ の (空でない) 部分集合 E で定義された関数とする. $f(x)$ が E で一様連続であるとは, 次が成り立つことをいう.

『任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 適当な $\delta > 0$ をとると, $|x - x'| < \delta$ をみたす任意の 2 点 $x, x' \in E$ に対して $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ となる.』

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E \quad (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

(注) $f(x)$ が E で一様連続でないということは:

『次のような $\varepsilon > 0$ が存在する: どんなに小さな $\delta > 0$ に対しても, 2 点 $x, x' \in E$ で, $|x - x'| < \delta$ かつ $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$ となるものが見出せる.』

定理 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は, そで一様連続である.

(注) E が閉区間でなければ E 上の連続関数が, そで一様連続とは限らない.

2. 定積分

定義 (1) 閉区間 $I = [a, b]$ の分割 Δ とは, 分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ をとって区間 I を小区間 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ に分けることをいう.

(2) 小区間 I_k の幅を $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ とし, $|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ を分割 Δ の幅という.

(3) 各小区間の代表点 $\xi_k \in I_k, k = 1, \dots, n$ をとる.

(4) $f(x)$ を区間 I で定義された関数とする. 分割 Δ , 代表点 $\{\xi_k\}$ を定めたとき,

$$R[f, \Delta, \{\xi_k\}] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \text{ をリーマン和とよぶ.}$$

(5) $f(x)$ が I で定積分可能とは, 分割の幅 $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき $R[f, \Delta, \{\xi_k\}]$ がある値に収束することをいう. この極限値を $\int_a^b f(x) dx$ と表わす.

定理 関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続ならば定積分可能である. $\int_a^b f(x) dx$ は.

微分積分学の基本定理 $f(x)$ は开区間 I で連続な関数とする.

(1) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

(2) $G(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば (すなわち $G'(x) = f(x)$ ならば),

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad (a, b \in I).$$

(重みつき) 平均値定理

$f(x), \varphi(x)$ は $I = [a, b]$ で連続, $m \leq f(x) \leq M$ ($x \in I$), $\varphi(x) \geq 0$ ($x \in I$) で, $\varphi(x)$ は恒等的に 0 ではないとする. このとき

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

が成り立つ. また $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx}$ をみたす $\xi \in I$ が存在する.

3. 広義積分

定義 (半無限区間の場合) $f(x)$ は $I = [a, \infty)$ で連続な関数とする.

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ が収束するという.

定理

(1) $f(x) \geq 0$ ($x \in I$) とする.

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ が収束} \iff \int_a^R f(x) dx \text{ が有界.}$$

(2) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($x \in I$) のとき

$$\int_a^\infty g(x) dx \text{ が収束} \implies \int_a^\infty f(x) dx \text{ が収束}$$

(3) $\int_a^\infty |f(x)| dx$ が収束 $\implies \int_a^\infty f(x) dx$ が収束

(この場合, 広義積分は絶対収束するという.)

定義 (有限区間の場合) $f(x)$ は $I = (a, b]$ で連続な関数とする.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ が収束するという.

この場合も上と同様の定理が成り立つ.

演習

- 1 次の広義積分の値を求めよ：

$$(1) \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a, b > 0, a \neq b)$$

- 2 次の広義積分が収束することを示せ：

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/3} + x^{7/5}}$$

(ヒント： $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{7/5}}$ と $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1/3} + x^{7/5}}$ のそれぞれが収束することを示す.)

- 3 次の関数は与えられた区間において一様連続ではないことを示せ：

$$(1) f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1] \quad (2) f(x) = x^2, \quad x \in [0, \infty)$$

(ヒント：任意の $\delta > 0$ に対して、 $|x - x'| < \delta$ かつ $|f(x) - f(x')| \geq 1$ となる x, x' があることを示す.)

- 4 $f(x)$ は区間 I で微分可能な関数で、導関数 $f'(x)$ が有界とする．このとき $f(x)$ は I で一様連続であることを示せ

宿題はありません

復習用問題

- 1 関数 $f(x)$ は区間 $I = [0, \infty)$ で連続で、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在するものとする． $f(x)$ は I で一様連続であることを示せ．

- 2 次の関数は $[0, \infty)$ で一様連続か？

$$(1) \sin(x^2), \quad (2) \sin \sqrt{x}$$

- 3 次の広義積分の収束発散を調べよ：

$$(1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}, \quad (2) \int \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$
$$(3) \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$