

宿題解答例

- 1 関数 $f(x) = \frac{\sin(x^{100})}{1-x}$ の k 次導関数の $x = 0$ における値 $f^{(k)}(0)$ を $k = 299$ および $k = 300$ について求めよ.

(解答例) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ だから, $\sin x^{100} = x^{100} - \frac{x^{300}}{3!} + o(x^{300})$.

また, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{200} + o(x^{200})$ したがって

$$\begin{aligned} \frac{\sin x^{100}}{1-x} &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{200} + o(x^{200})) \left(x^{100} - \frac{1}{3!} x^{300} + o(x^{300}) \right) \\ &= x^{100} + x^{101} + \cdots + x^{299} + \left(1 - \frac{1}{3!}\right) x^{300} + o(x^{300}) \end{aligned}$$

これが $f(x)$ の 0 の周りのテイラー近似式に一致するから

$$\frac{f^{(299)}(0)}{299!} = 1, \quad \frac{f^{(300)}(0)}{300!} = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}. \quad \text{よって } f^{(299)}(0) = 299!, \quad f^{(300)}(0) = \frac{5}{6} \cdot 300!$$

- 2 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$ の両辺の区間 $[0, 1]$ 上の積分を考察することにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

の値を求めよ.

(解答例)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n) dx + \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$$

より

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

ここで

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$$

だから, この積分は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. したがって求める極限值は $\frac{\pi}{4}$ である.

(注) 同じ考え方で

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を示すことができる.

□3 不定積分 $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ を次の2通りの方法で計算せよ：

(積分定数を省略する)

$$(1) \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$$

(2) $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ とおくと, $x \in (-1, 1) \mapsto t \in (0, \infty)$ は全単射で, この逆関数は

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int t \varphi'(t) dt = t \varphi(t) - \int \varphi(t) dt \\ &= t \varphi(t) - \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt \\ &= t \varphi(t) - t + 2 \tan^{-1} t \\ &= (x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} + 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{aligned}$$

($x-1 < 0$ だから $x-1 = -\sqrt{(1-x)^2}$ であることに注意.)

(注) $\sin^{-1} x$ と $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ の差が定数であることを確かめてください.

□4 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ を求めよ.

(解答例)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

となるように A, B, C を定める. $A = 1/3, B = -1/3, C = 2/3$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}(2x-1) + \frac{1}{2}}{x^2-x+1} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

不定積分は

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi.$$