微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.6 2016 年 6 月 30 日

演習解答例 （以下の不定積分では積分定数を省略する.）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ：

(1)
$$\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\Big)dx$$
$$= \log|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \tan^{-1}x.$$

(2)
$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

(3)
$$\int \sin^{-1}x dx = \int (x)'\sin^{-1}x dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$$

（別解） $\theta = \sin^{-1}x$ とおくと，$x \in [-1,1] \mapsto \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ は全単射である.

$$\int \sin^{-1}x\,dx = \int \theta(\sin\theta)'d\theta = \theta\sin\theta - \int \sin\theta\,d\theta$$
$$= \theta\sin\theta + \cos\theta = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}.$$

（$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ のとき $\cos\theta \geq 0$ だから）

$\boxed{2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ を次の 3 通りの変数変換によって計算せよ：

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ ； (2) $x = \tan\theta$ ； (3) $x = \sinh t$.

（解答例）

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とおくと，対応 $x \in \mathbf{R} \mapsto t \in (0, \infty)$ は全単射である.

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2} \quad より，$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

(2) $x = \tan\theta$ とおくと，$\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \mapsto x \in \mathbf{R}$ は全単射である．

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{より，}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta} &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \\ &= \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \log(\sqrt{x^2+1}+x).\end{aligned}$$

(3) $x = \sinh t$ とおくと，$t \in \mathbf{R} \mapsto x \in \mathbf{R}$ は全単射である．

$\sqrt{x^2+1} = \cosh x,\ \dfrac{dx}{dt} = \cosh t$ より，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int dt = t = \log(\sqrt{x^2+1}+x).$$

（注） 上の３通りの変数変換はいずれも，曲線 $y = \sqrt{x^2+1}$ （すなわち双曲線 $y^2 - x^2 = 1$ の上側の枝）を適当なパラメータで表示するという考えに基いている．

(1) では

$$(x, y) = \left(\frac{t^2-1}{2t},\ \frac{t^2+1}{2t}\right), \quad t \in (0, \infty)$$

(2) では

$$(x, y) = \left(\tan\theta,\ \frac{1}{\cos\theta}\right), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi).$$

(3) では

$$(x, y) = (\sinh u,\ \cosh u), \quad u \in \mathbf{R}.$$

なお (1) の t と (3) の u には $t = e^u$ という関係がある．

$\boxed{3}$ 定積分を求めよ： $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}.$

（解答例）$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $x \in (-\pi, \pi) \mapsto t \in \mathbf{R}$ は全単射で，この逆関数は $t = 2\tan^{-1} x$．また，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5+4\cos x} &= \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{9+t^2} dt \\ &= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

これより

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = \lim_{x\to\pi-0} \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

また

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = \int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{5+4\cos x} = \int_0^{-\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = \frac{\pi}{3}$$

だから，求める値は $\dfrac{2\pi}{3}$.

（注）　関数 $F(x) = \dfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ は各区間 $\big((2n-1)\pi, (2n+1)\pi\big)$, $n \in \mathbf{Z}$ における $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$ の原始関数で あるが，実数直線 $\mathbf{R}$ 全体で定義された関数ではないことに注意する必要がある．

$f(x)$ は $\mathbf{R}$ で連続だから $\mathbf{R}$ 全体で原始関数が存在するはずである．

$$G(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{\sin x}{2+\cos x} + (\text{定数})$$

が原始関数であることを確かめてください．

下図は $F(x)$ および $G(x)$ のグラフを示す．