微分積分学 A 演義 (S2, S6)　No.6　　2016 年 6 月 30 日

１．不定積分

定義　$f(x)$, $F(x)$ を区間 I で定義された関数とする．$F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数（不定積分）という．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の（一つ）であれば

$G(x)$ が $f(x)$ の原始関数 $\Longleftrightarrow$ $G(x) = F(x) + C$ （ここで C は定数）．

基本的関数の原始関数

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

(4) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x,$　　(5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$

(6) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \frac{1}{\cos^2 x}$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x,$　　(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log(x + \sqrt{x^2+A})$

線形性　$\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx$

部分積分　$\displaystyle\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$

置換積分（変数変換）　$\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

２．初等関数で表せる不定積分

(1)　有理関数の不定積分は，有理関数，対数関数 log，逆正接関数 $\tan^{-1}$ を用いて表わすことができる．

(2)　$R(u, v)$ が２変数 u, v の有理関数のとき，$R(\sin x, \cos x)$ の不定積分は有理関数の不定積分に帰着する．

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}dt$$

(3) $R(u,v)$ が２変数 u,v の有理関数のとき，$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ の不定積分は有理関数の不定積分に帰着する．

（例１） $R(x,\sqrt{x^2+A})$ の不定積分

$$t = x+\sqrt{x^2+A} \quad \text{とおくと} \qquad \frac{A}{t} = -x+\sqrt{x^2+A}$$

$$x = \frac{1}{2}\Big(t-\frac{A}{t}\Big) = \frac{t^2-A}{2t}, \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\Big(t+\frac{A}{t}\Big) = \frac{t^2+A}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{A}{t^2}\Big) = \frac{t^2+A}{2t^2}$$

これより

$$\int R(x,\sqrt{x^2+A})dx = \int R\Big(\frac{t^2-A}{2t},\frac{t^2+A}{2t}\Big)\frac{t^2+A}{2t^2}dt$$

（例２） $R(x,\sqrt{a^2-x^2})$ の不定積分

$x = a\sin\theta(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ とおくと，

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx = \int R(a\sin\theta, a\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

（補足）双曲線関数

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

を双曲線関数（ハイパーボリックコサイン等）という．

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$$

$$\sin(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

これらの逆関数を逆双曲線関数という．

$$\sinh^{-1} x = \log(x+\sqrt{x^2+1}), \qquad (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cosh^{-1} x = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \ \ (x\geq 1), \quad (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \qquad (|x|<1), \quad (\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

演習

$\boxed{1}$　次の不定積分を求めよ：

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$,　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$

（ヒント：(1) $\displaystyle\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ と部分分数分解，

(2) 分母を (1 次式)^2+ 定数 の形に変形する.

(3) 部分積分または $\theta = \sin^{-1} x$ で変数変換.）

$\boxed{2}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ を次の 3 通りの変数変換によって計算せよ：

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ ；　(2) $x = \tan\theta$ ；　(3) $x = \sinh t$.

$\boxed{3}$　定積分を求めよ：　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$.

宿題　7 月 5 日 (火) 11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\sin(x^{100})}{1-x}$ の k 次導関数の $x=0$ における値 $f^{(k)}(0)$ を $k=299$ および $k=300$ について求めよ.

（ヒント：$\sin(x^{100})$ と $1/(1-x)$ の，0 の周りのテイラー近似は？ これがわかれば $f(x)$ のテイラー近似もわかる.）

$\boxed{2}$ $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$ の両辺の区間 $[0,1]$ 上の積分を考察することにより

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

の値を求めよ.

$\boxed{3}$　不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ を次の 2 通りの方法で計算せよ：

(1) $\displaystyle\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ と変形する.　(2) $t = \displaystyle\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ で変数変換.

$\boxed{4}$　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ を求めよ.