微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.5　　2016 年 6 月 16 日

宿題解答例

$\boxed{1}$ $f(x)$ は点 $a, a+h$ を含む区間で微分可能で，そこで $m \le f'(x) \le M$ とする．このとき $f(a+h)$ の近似値として $f(a)+f'(a)h$ をとれば，その誤差の絶対値は $(M-m)h$ 以下であることを証明せよ.（訂正） 問題文を「誤差の絶対値は $(M-m)|h|$ 以下」と訂正します. ただし $h>0$ として答えていれば正解とします.

(解答例）平均値定理より

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$

をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．これより

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) = (f'(a+\theta h) - f'(a))h$$

$f'(a), f'(a+\theta h) \in [m, M]$ だから

$$|f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)| \le M - n$$

したがって，誤差は

$$|f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)| \le (M-m)|h|.$$

$\boxed{2}$ (1) $\tan x$ の $x=0$ の周りの 3 次テイラー近似式を求めよ。

(2) $\tan x$ のテイラー近似式の偶数次の項の係数は 0 で，奇数次の項の係数は正であることを示せ。

（解答例 1 ）(1) $f(x) = \tan x$ とおくと $f(0)=0$ で，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) &= 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x, \quad f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) &= (2+6\tan^2 x)(1+\tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x, \quad f^{(3)}(0) = 2 \end{aligned}$$

これより $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

(2) まず，次の命題 (A_n) を帰納法で証明する：

命題 (A_n) ： $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は $\tan x$ の $n+1$ 次多項式

$$f^{(n)}(x) = P_n(\tan x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} \tan^k x$$

の形に表せて，

n が偶数ならば $c_{n,k} \begin{cases} = 0 & (k \text{ が偶数}) \\ > 0 & (k \text{ が奇数}) \end{cases}$,　　n が奇数ならば $c_{n,k} \begin{cases} > 0 & (k \text{ が偶数}) \\ = 0 & (k \text{ が奇数}) \end{cases}$

となる．

まず $n=0$ のときは $f(x)=\tan x$ だからこの主張は成り立つ．(A_n) が成り立つとすると，

$$f^{(n+1)}(x)={P_n}'(\tan x)(1+\tan^2 x)$$

だから (A_{n+1}) も成り立つ．
これより $f^{(n)}(0)=P_n(0)$ は n が偶数のとき 0 で，n が奇数のとき正である．よって問題の主張は示された．

（解答例２）$f(x)=\tan x$ は奇関数である（すなわち $f(-x)=-f(x)$） だから $f^{(k)}(-x)=(-1)^{k+1}f^k(x)$． したがって k が偶数のとき $f^{(k)}(0)=0$ で，テイラー近似式の偶数次の項の係数は 0 である．

$$f(x)=a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

とすると

$$(*)\quad f'(x)=a_1+3a_3x^2+\cdots+(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+o(x^{2n})$$

また

$$(**)\quad 1+f(x)^2=1+a_1^2x^2+2a_1a_3x^4+\cdots+\Bigl(\sum_{i=1}^{n-1}a_{2i-1}a_{2n-2i+1}\Bigr)x^{2n}+o(x^{2n})$$

（x^{2k} の係数は $\sum_{i=1}^{n-1}a_{2i-1}a_{2n-2i+1}=a_1a_{2k-1}+a_3a_{2k-3}+\cdots+a_{2k-1}a_1$）
(*) と (**) が一致するから $a_1=1,\ 3a_3=a_1^2,\ 5a_5=2a_1a_3,\ldots$ 一般に

$$(2k+1)a_{2k+1}=a_1a_{2k-1}+a_3a_{2k-3}+\cdots+a_{2k-1}a_1$$

だから題意は成り立つ．

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ：

$$(1)\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\qquad (2)\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

（解答例１）

(1) $e^x-e^{-x}=2x+o(x), \sin x=x+o(x)$ だから

$$\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{2x+o(x)}{x+o(x)}=\frac{2+o(1)}{1+o(1)}\to2\quad(x\to0)$$

(2) $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ だから

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x+1-e^x}{(e^x-1)x}=\frac{-\frac12x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{-\frac12+o(1)}{1+o(1)}\to-\frac12\quad(x\to0)$$

（解答例２）

(1) $x \to 0$ のとき $e^x - e^{-x} \to 0, \sin x \to 0$ である．また

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \to 2 \quad (x \to 0)$$

だから，ロピタルの定理により，求める極限は 2.

(2) $\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x + 1 - e^x}{(e^x - 1)x}$ の分子，分母を $f(x)$, $g(x)$ とする．

$x \to 0$ のとき $f(x) \to 0$. $f'(x) = 1 - e^x \to 0$, $f''(x) = -e^x \to -1$

また $x \to 0$ のとき $g(x) \to 0$, $g'(x) = xe^x + e^x - 1 \to 0$, $g''(x) = xe^x + 2e^x \to 2$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{1}{2}$ だからロピタルの定理により $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}$. ロピタルの定理をもう一度用いて，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{4}$ (1) f は 0 を含む開区間で定義された関数とする．定数 $a_0, \ldots, a_n$, $b_0, \ldots, b_n$ があって

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R(x),\ R(x) = o(x^n)$$
$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + S(x),\ S(x) = o(x^n)$$

ならば $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ であることを示せ．

（解答例）

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n)$$

が成り立っている．$a_k - b_k = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$ を帰納法で示そう．

まず，上の式で $x \to 0$ とした極限をとれば $a_0 - b_0 = 0$ がわかる．

$a_0 - b_0 = \cdots = a_{k-1} - b_{k-1} = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ が示されたとする．$(a_k - b_k)x^k + \cdots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n)$ より $(a_k - b_k) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} = o(x^{n-k})$ だから $x \to 0$ とした極限をとれば $a_k - b_k = 0$ となる．

(2) $\dfrac{1}{1 + x^2}$ の $x = 0$ の周りの $2n$ 次テイラー近似式は

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$$

であることを示せ．

（解答例）$f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ とおく．テイラーの定理により

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}}{(2n)!}x^{2n} + R(x), \quad R(x) = o(x^{2n})$$

が成り立つ．一方で

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n + S(x)$$

とすると $S(x) = \dfrac{(-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} = o(x^{2n})$ である．(1) より $1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ が $2n$ 次のテイラー近似式である．