微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.5　　2016 年 6 月 16 日

演習解答例

$\boxed{1}$ 次の関数について、 $x \to +0$ のとき高位の無限小であるものの順に並べ替えよ：

$$x, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt{x^3}, \quad x\log x$$

（解答例） $\sqrt{x^3}, \quad x, \quad x\log x, \quad \sqrt{x}$ （左がより高位の無限小）

$$\lim_{x\to+0}\frac{x\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x = \lim_{t\to+\infty}\frac{\log(1/t)}{\sqrt{t}} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{2\log\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 0$$

だから $x\log x = o(\sqrt{x}) \quad (x \to +0)$ である．他は容易．

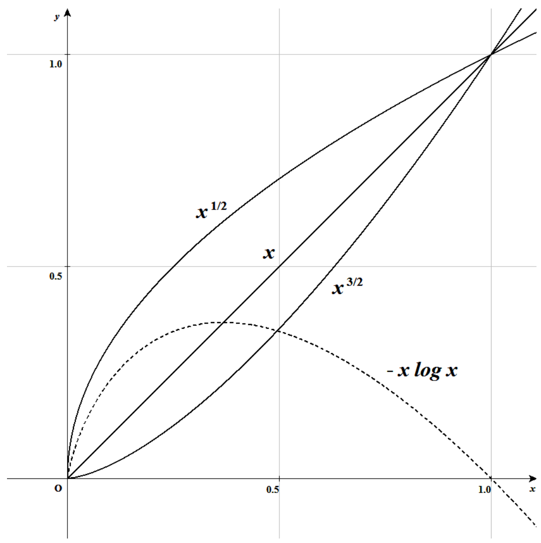
$\boxed{2}$ 次の関数について、 $x \to +0$ のとき高位の無限大であるものの順に並べ替えよ：

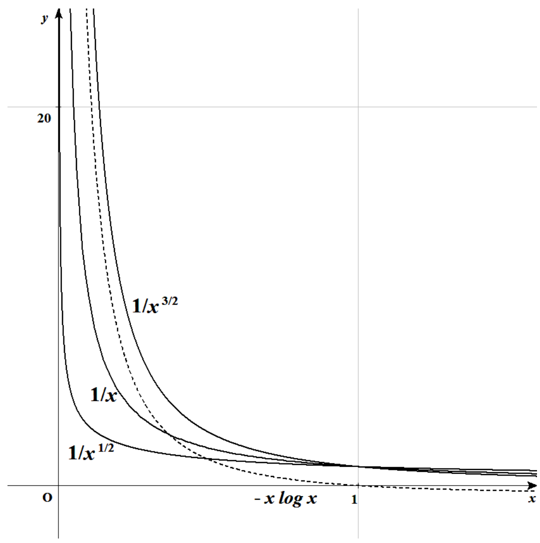
$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \frac{\log x}{x}$$

（解答例） $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \dfrac{\log x}{x}, \quad \dfrac{1}{x}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ （左がより高位の無限大）

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)/x}{1/\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x = 0$$

だから $\dfrac{\log x}{x} = o(\sqrt{x^3}) \quad (x \to +0)$ である．他は容易．





$\boxed{3}$ 次の関数の $x=0$ の周りの２次，および３次テイラー近似式を求めよ．

$$(1)\quad \log(1+x), \qquad (2)\quad \sqrt{1+x}.$$

（解答例）(1) $f(x)=\log(1+x)$ とおくと，

$$f'(x)=1/(1+x), \quad f''(x)=-1/(1+x)^2, \quad f^{(3)}(x)=2/(1+x)^3$$

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=-2, \quad f^{(3)}(0)=3$$

したがって

$$\log x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

同様に３次テーラー近似は

$$\log x = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

$$f(0)=1, \quad f'(0)=\frac{1}{2}, \quad f''(0)=-\frac{1}{4}, \quad f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}$$

したがって２次，３次のテイラー近似は

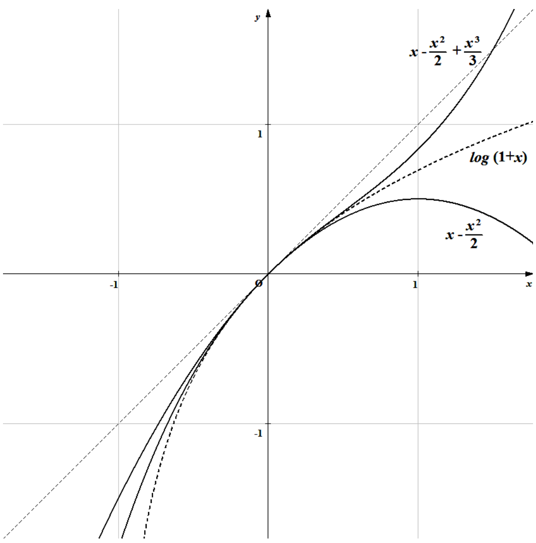
$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

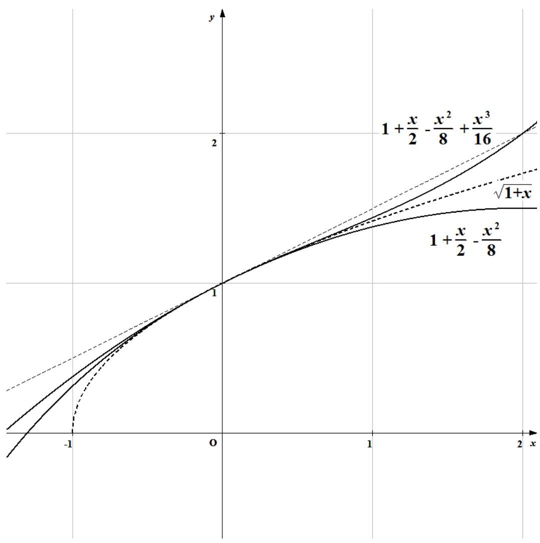
$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

（注）これらの関数の n 次のテイラー近似は

$$\log x = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n+o(x^n)$$





$\boxed{4}$ (1) $f(x) = \sin x$ についてマクローリンの公式（テイラーの公式）

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}, (0 < \theta < 1)$$

の計算を実行せよ．

(2) 次の不等式を示せ：

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad (0 < x < \pi)$$

（解答例）

(1) $f(x) = \sin x$ とおくと，

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & （k \text{ が偶数} = 2m \text{ のとき }） \\ (-1)^{m-1} \cos x & （k \text{ が奇数} = 2m-1 \text{ のとき}） \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

（または，$(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ だから $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$）．したがって

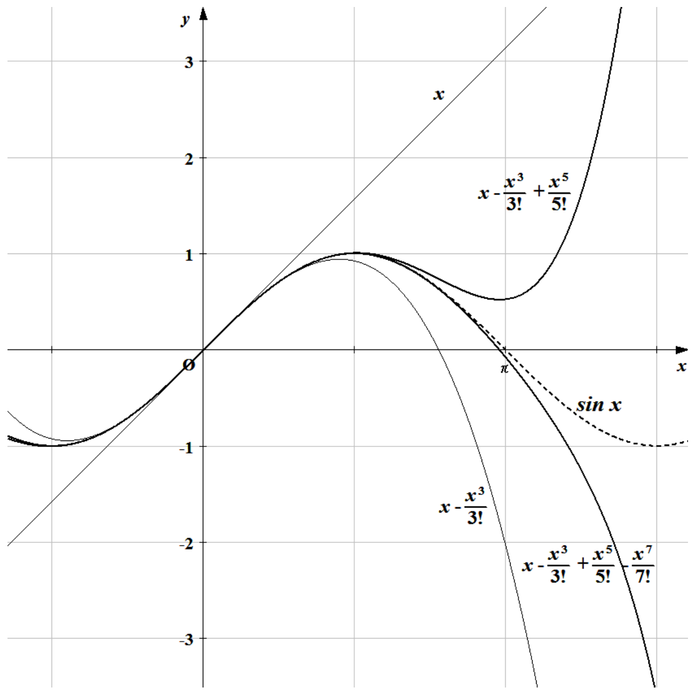
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & （k \text{ が偶数のとき}） \\ (-1)^m & （k \text{ が奇数} = 2m-1 \text{ のとき}） \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + (-1)^n \frac{\sin(\theta x)}{(2n)!}x^{2n} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} + (-1)^n \frac{\sin(\theta x)}{(2n)!}x^{2n} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

(2) 上の式で $n = 3, 4$ とすると

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\theta_1 x)}{6!}x^6 & (0 < \theta_1 < 1) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta_2 x)}{8!}x^6 & (0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

ここで $\theta_1 x,\ \theta_2 x \in (0, \pi)$ だから，$\sin(\theta_1 x),\ \sin(\theta_2 x) > 0$ であり，問題の不等式が成り立つ．


y
3
2
1
-1
-2
-3
O
x
π
x
$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$
$\sin x$
$x-\frac{x^3}{3!}$
$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$