

1. 無限小・無限大

以下では, 関数 $f(x)$, $g(x)$ は点 a を含む区間または a を端点とする区間で定義されているとする. (ただし a における値は定義されていなくてもよい.)

- $f(x)$ が a において無限小である $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- $f(x)$ が a において正の (または負の) 無限大である $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.
- $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$) ($f(x)$ が $g(x)$ で押さえられる)
 $\iff$ 定数 M があって a の近くで $|f(x)/g(x)| \leq M$ が成り立つ.
- $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) ($f(x)$ は $g(x)$ に比べて無視できる) $\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
 - f が無限小で $f(x) = o(g(x))$ のとき, $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小.
 - f が無限大で $f(x) = o(g(x))$ のとき, $g(x)$ は $f(x)$ より高位の無限大.

例 (1) $(x-a)^2 = o(x-a)$ ($x \rightarrow a$): a において $(x-a)^2$ は $x-a$ より高位の無限小.

(2) $\frac{1}{\sqrt{|x-a|}} = o\left(\frac{1}{|x-a|}\right)$ ($x \rightarrow a$): a において $\frac{1}{\sqrt{|x-a|}}$ は $\frac{1}{|x-a|}$ より低位の無限大.

(3) $\alpha > 0$ として $\log x = o(1/x^\alpha)$ ($x \rightarrow +0$)

2. テイラー近似

$f(x)$ が a で微分可能ならば, a の周りで $f(x)$ は 1 次式 $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ によって近似できる. 言い換えれば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_2(x)$$

とおくと, 近似の誤差 $R(x)$ が $x-a$ より高位の無限小となる.

これを一般化して, 関数 f を多項式によって, より精密に近似できないかという問題が考えられる. これに答えるのがテイラー近似である.

関数 f が a を含む区間で C^n 級ならば, $f(x)$ は a の周りで, n 次多項式 $P_n(x)$ によって誤差が $(x-a)^n$ より高位の無限小となるように近似できる. この近似多項式 $P_n(x)$ は $P_n(a) = f(a)$, $P'_n(a) = f'(a)$, $\dots$, $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ という条件で定まる. すなわち

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

そして $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ とおくと, 近似の誤差は $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$.

定理 関数 f は開区間 I で n 回微分可能とする. a, b を区間 I の点とする.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる c が存在する.

(注) この式で b を変数とみて x と書きなおすと

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

これは $f(x)$ を $n-1$ 次式で近似したときの誤差を与えている.

補題 $f(x), g(x)$ は a, b を含む区間 I で n 回微分可能で,

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$$

とする. このとき $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$ となる c ($a < c < b$ または $b < c < a$) が存在する.

(証明) $a < b$ とする. コーシーの平均値定理より,

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}$$

となる点 $c_1 \in (a, b)$ がある. さらに

$$\frac{f(c_1)}{g(c_1)} = \frac{f(c_1) - f(a)}{g(c_1) - g(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}$$

なる点 $c_2 \in (a, c_1)$ がある. これを繰り返すと

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \cdots = \frac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}$$

となる $a < c_n < \cdots < c_1 < b$ がとれる. $c = c_n$ とすればよい.

$$(定理の証明) \quad P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

とおき, $R(x) = f(x) - P(x)$ とする. このとき

$$R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(n-1)}(a) = 0, \quad R^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

$g(x) = (x-a)^n$ とおくと

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0, \quad g^{(n)}(x) \equiv n!$$

補題より $\frac{R(b)}{g(b)} = \frac{R^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ となる c が存在する. このとき $R(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ である.

系 f が開区間 I で C^n 級関数のとき,

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

とおくと $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$ である.

(証明) 上の定理の c を用いて, $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a))(x-a)^n$ と表せる. $x \rightarrow a$ のとき $f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a) \rightarrow 0$ だから $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$

3. ロピタルの定理

定理 $f(x), g(x)$ が a において無限小とする. $f(x), g(x)$ が微分可能で,

$$\ell = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在すれば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

定理 $f(x), g(x)$ が a を含む区間で n 回微分可能で,

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$$

とする. $g^{(n)}(a) \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$

演習

- [1] 次の関数について、 $x \rightarrow +0$ のとき高位の無限小であるものの順に並べ替えよ：

$$x, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt{x^3}, \quad x \log x$$

- [2] 次の関数について、 $x \rightarrow +0$ のとき高位の無限大であるものの順に並べ替えよ：

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \frac{\log x}{x}$$

- [3] 次の関数の $x = 0$ の周りの2次, および3次テイラー近似式を求めよ.

$$(1) \quad \log(1+x), \quad (2) \quad \sqrt{1+x}.$$

- [4] (1) $f(x) = \sin x$ についてマクローリンの公式 (テイラーの公式)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}, \quad (0 < \theta < 1)$$

の計算を実行せよ.

- (2) 次の不等式を示せ：

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad (0 < x < \pi)$$

宿題

6月21日(火) 11:00 までに、全学共通科目レポートボックスに提出

- 1 $f(x)$ は点 $a, a+h$ を含む区間で微分可能で、そこで $m \leq f'(x) \leq M$ とする. このとき $f(a+h)$ の近似値として $f(a) + f'(a)h$ をとれば、その誤差の絶対値は $(M-m)h$ 以下であることを証明せよ.

- 2 (1) $\tan x$ の $x=0$ の周りの3次テイラー近似式を求めよ。
(2) $\tan x$ のテイラー近似式の偶数次の項の係数は0で、奇数次の項の係数は正であることを示せ。

- 3 次の極限値を求めよ：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

- 4 (1) f は 0 を含む开区間で定義された関数とする. 定数 $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ があって

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + R(x), \quad R(x) = o(x^n)$$

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + S(x), \quad S(x) = o(x^n)$$

ならば $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ であることを示せ.

- (2) $\frac{1}{1+x^2}$ の $x=0$ の周りの $2n$ 次テイラー近似式は

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^{2n}$$

であることを示せ.

(ヒント： $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ であることを示せ.)