

宿題解答例

□1 次の関数の導関数を求めよ. (これらの関数が定義される範囲も示すこと.)

$$(1) \log(\log x) \quad (2) x^x$$

$$(3) \sin^{-1} \sqrt{x} \quad (4) \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$$

(解答例)

$$(1) \text{ この関数は } (1, \infty) \text{ で定義されている. } (\log(\log x))' = \frac{1}{x \log x}.$$

$$(2) f(x) = x^x \text{ は } (0, \infty) \text{ で定義されている. } \log f(x) = x \log x \text{ の両辺を微分 (対数微分) すると } \frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1. \text{ したがって } f'(x) = (\log x + 1)x^x.$$

$$(3) \text{ この関数は } [0, 1] \text{ で定義され } (0, 1) \text{ で微分可能で } (\sin^{-1} \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} \quad (0 < x < 1)$$

$$(4) \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{ が意味をもつためには } (a \geq b \geq 0 \text{ かつ } a \neq 0) \text{ または } (a \leq b \leq 0 \text{ かつ } a \neq 0) \text{ でなくてはならない. 与えられた関数 } f(x) \text{ は, } x \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbf{Z} \text{ で定義されている. } a > 0 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \tan^2 \frac{x}{2}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a+b) \cos^2 \frac{x}{2} + 2(a-b) \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a + b \cos x)}. \end{aligned}$$

$a < 0$ のときは, これに $-$ がつく.

□2 次の不等式を示せ:

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

(解答例) 関数 $f(x) = \log x$ とおくと $f'(x) = 1/x$. 区間 $[x, x+1]$ で平均値定理を適用すると $f(x+1) - f(x) = f'(c) = 1/c$ を満たす $c \in (x, x+1)$ が存在することがわかる. $x/(x+1) < 1/c < 1/x$ だから題意の不等式が成り立つ.

($x < t < x+1$ のとき $1/(x+1) < 1/t < 1/x$. これを $[x, x+1]$ で積分してもよい.)

- 3 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ を含むある区間 I で 3 回微分可能な関数とする. $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b) = 0$ であれば, $f^{(3)}(c) = 0$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在することを示せ.

(解答例) ロルの定理より, $f'(c_1) = 0$ なる点 $c_1 \in (a, b)$ が存在する. $f'(x)$ について区間 $[a, c_1]$ および $[c_1, b]$ でロルの定理を適用すれば $f''(c_2) = 0$, $f''(c_3) = 0$ なる $c_2 \in (a, c_1)$, $c_3 \in (c_1, b)$ が存在することがわかる. $f''(x)$ について区間 $[c_2, c_3]$ でロルの定理を適用すれば $f^{(3)}(c_4) = 0$ なる点 $c_4 \in (c_2, c_3)$ が存在することがわかる.

($f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m)}(a) = 0$, $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(n)}(b) = 0$ (ここで m, n は整数 ≥ 0) とすると どのようなことがいえるか?)

- 4 α を正実数として, 次の関数を考える:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

- (1) $f(x)$ が 0 で微分可能であるために α が満たすべき条件を求めよ.
 (2) $f(x)$ が $\mathbf{R}$ で C^1 級であるために α が満たすべき条件を求めよ.

(解答例) (1) $x \neq 0$ のとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

これが $x \rightarrow 0$ のとき収束するためには $\alpha > 1$ であることが必要かつ十分である. よって求める条件は $\alpha > 1$.

- (2) $\alpha > 1$ のとき

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

であって, $f'(x)$ は 0 以外の点では連続である. $f'(x)$ が 0 で連続であるためには $\alpha > 2$ であることが必要かつ十分である. よって求める条件は $\alpha > 2$.