

演習解答例

1 次の不等式を示せ：

$$(1) \quad \log x \leq x - 1 < x \quad (x > 0).$$

$$f(x) = x - \log x \text{ とおくと } f'(x) = 1 - 1/x.$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } f'(x) < 0, \quad f'(1) = 0, \quad x > 1 \text{ のとき } f'(x) > 0.$$

したがって f は $x = 1$ のとき最小値をとる．よって $f(x) \geq f(1) = 1$.

$$(2) \quad \log x \leq \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} < \frac{x^\alpha}{\alpha} \quad (x > 0, \alpha > 0)$$

$$(1) \text{ において } x \text{ を } x^\alpha \text{ でおきかえると } \alpha \log x = \log x^\alpha \leq x^\alpha - 1.$$

2 次の関数 f の導関数を求めよ．また $y = f(x)$ のグラフを描け．

$$(1) \quad f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0) \text{ とすると, } f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \log x).$$

$0 < x < e$ のとき $f'(x) > 0$, $f'(e) = 0$, $x > e$ のとき $f'(x) < 0$ だから, $x = e$ のとき最大値 $f(e) = 1/e$ をとる．

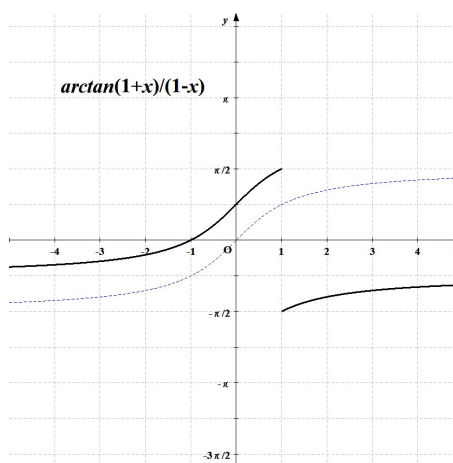
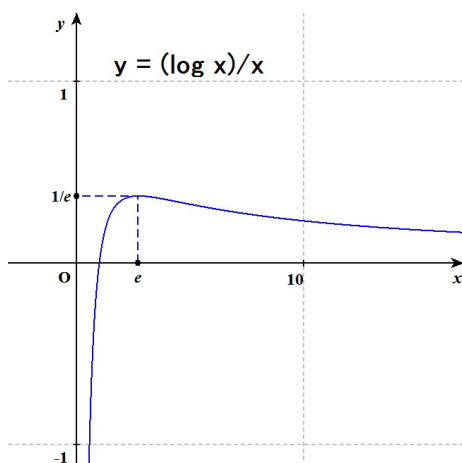
$x \rightarrow +0$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$. 前問 (2) より $\log x < 2x^{1/2}$ だから, $x > 0$ のとき $0 < f(x) = \frac{\log x}{x^{1/2}} \frac{1}{x^{1/2}} < \frac{2}{x^{1/2}}$. よって $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$.

$$(2) \quad f(x) = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \text{ とする.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

f は $(-\infty, 1)$ $(1, \infty)$ のそれぞれにおいて増加関数である．

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}, & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \tan^{-1} t = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



- 3 微分法の公式 $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を認めた上で $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ.

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- 4 (1) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能で, $f(a) = f(b) = 0$ とする. また導関数 $f'(x)$ は増加関数とする. このとき $[a, b]$ で $f(x) \leq 0$ であることを示せ.

(解答例 1) ロルの定理により $f'(c) = 0$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する. f' が増加関数だから $x \in (a, c)$ で $f'(x) \leq 0$, $x \in (c, b)$ で $f'(x) \geq 0$. したがって f は $[a, c]$ で減少, $[c, b]$ で増加, $x \in [a, c]$ のとき $f(x) \leq f(a) = 0$, $x \in [c, b]$ のとき $f(x) \leq f(b) = 0$. よって $[a, b]$ で $f(x) \leq 0$ である.

(解答例 2) x を区間 (a, b) 内の任意の点とする. 平均値定理より

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a}$$

となる点 $c_1 \in (a, x)$ が存在する. 同様に平均値定理により

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = -\frac{f(x)}{b - x}$$

となる点 $c_2 \in (x, b)$ が存在する. もし $f(x) > 0$ であれば, $f'(c_1) > 0 > f'(c_2)$ となって $f'(x)$ が増加関数であることに反する. よって $f(x) \leq 0$ である.

- (2) 関数 f は区間 I で微分可能で, 導関数 f' が増加関数ならば, f は凸関数であることを示せ.

(解答例 1) a, b を区間 I の 2 点で, $a < b$ とする. $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線は $y = f(a) + k \cdot (x - a)$ で与えられる. ここで $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とした. $\varphi(x) = f(x) - f(a) - k \cdot (x - a)$ とおくと. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ で $\varphi'(x) = f'(x) - k$ は増加関数. したがって (1) より $[a, b]$ で $\varphi(x) \leq 0$. すなわち

$$f(x) \leq f(a) + k \cdot (x - a).$$

これは点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を結ぶ線分が $y = f(x)$ のグラフの下側にあることを示している.

(解答例 2) x を区間 (a, b) 内の任意の点とする.

平均値定理により $f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ となる点 $c_1 \in (a, x)$ が存在する. 同様に平均値定理により $f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ となる点 $c_2 \in (x, b)$ が存在する. $f'(x)$ が増加関数だから, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, したがって $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

これより

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \end{aligned}$$

が得られる.