

1. 微分係数, 導関数

定義 (微分可能性) 点 x_0 を含むある区間で定義された関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能とは極限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ が存在すること.

このとき, この極限値を微分係数とよび $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ で表わす. f が区間 I の各点で微分可能のとき, I の各点 x に $f'(x)$ を対応させる関数を f の導関数という.

微分可能性と同値な条件 次の (1), (2), (3) は互いに同値である:

- (1) f が x_0 で微分可能である
- (2) 実数 α があって $f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + R(h)$, $\frac{R(h)}{h} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) が成り立つ.
- (3) x_0 で連続な関数 $\varphi(x)$ があって $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ と表わせる.

微分の計算法則 f, g が点 x_0 で微分可能とするとき ((x_0) を略す)

- (1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ α, β は定数
- (2) $(fg)' = f'g + fg'$, (3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g(x_0) \neq 0$)

合成関数の微分係数 f が x_0 で微分可能, $g(y)$ が $y_0 = f(x_0)$ で微分可能ならば, 合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ は x_0 で微分可能で

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))g'(x_0) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

逆関数の微分係数 f が x_0 で微分可能で $f'(x_0) \neq 0$ ならば $y_0 = f(x_0)$ を含むある区間で逆関数 $f^{-1}(y)$ が定まり

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x_0 = f^{-1}(y_0)) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx}$$

初等関数の導関数

- (1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (2) $(e^x)' = e^x$ (3) $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$
- (4) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- (5) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

例（導関数は連続とは限らない） 次の関数 f は $\mathbf{R}$ で微分可能だが、 f' は 0 で不連続.

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0 \text{ のとき}), \quad f(0) = 0$$

2. 平均値定理, 関数の増減・凹凸

ロルの定理 関数 f が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能, かつ $f(a) = f(b)$ とする. このとき $f'(c) = 0$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する.

(ラグランジュの) 平均値定理 関数 f が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能とする. このとき $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する.

(注) ここで $f(a) = f(b)$ という条件をつけたものがロルの定理である.

関数の増減 $f(x)$ は区間 I で微分可能とする.

(1) I でつねに $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) $\implies f(x)$ は増加 (狭義増加)

(1) I でつねに $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) $\implies f(x)$ は減少 (狭義減少)

(3) I でつねに $f'(x) = 0$ $\implies f(x)$ は定数関数

定義 (極大・極小) 関数 f は区間 I で定義された関数とする. f が点 x_0 において極大値をとるとは適当な $\varepsilon > 0$ をとると $|x - x_0| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(x_0)$ が成り立つことをいう. 極小についても同様に定義する.

定理 f が区間 I の内部の点 x_0 で微分可能で, そこで極大値または極小値をとれば, $f'(x_0) = 0$.

コーシーの平均値定理 関数 f, g が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能, $g(a) \neq g(b)$ とする. また $f'(x), g'(x)$ が同時に 0 になることはないとする. このとき $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する.

(注) ここで $g(x) = x$ としたものが (ラグランジュの) 平均値定理である.

定義 (凸関数) 区間 I で定義された関数 f が下に凸であるとは, $y = f(x)$ のグラフ上の任意の 2 点を結ぶ線分がグラフより下側にならないことをいう. 下に凸な関数を凸関数という.

定理 関数 f は区間 I で微分可能で, 導関数 f' が増加関数ならば f は凸関数である.

3. 高次（高階）導関数

定義（高次導関数） f が I で微分可能ならば，導関数 f' が定義できる．さらに f' が I で微分可能のときその導関数 f'' を f の 2 次導関数という．同様に f の $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}$ が定義できて微分可能ならば， f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が定義できる．

定義（ n 回微分可能な関数， C^n 級関数） n 次導関数をもつ関数を n 回微分可能関数という． f が n 回微分可能で $f^{(n)}$ が区間 I で連続のとき， f を I における C^n 級関数という．

ライプニッツの公式 f, g が n 回微分可能のとき，積 fg も n 回微分可能で

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}, \quad \text{ここで } \binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ は二項係数}$$

$$\begin{array}{rcl} fg & = & fg \\ (fg)' & = & f'g + fg' \\ (fg)'' & = & f''g + 2f'g' + fg'' \\ (fg)^{(3)} & = & f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)} \\ (fg)^{(4)} & = & f^{(4)}g + 4f^{(3)}g' + 6f''g'' + 4f'g^{(3)} + fg^{(4)} \end{array}$$

演習

1 次の不等式を示せ：

$$\begin{array}{ll} (1) & \log x \leq x - 1 < x \quad (x > 0) \\ (2) & \log x \leq \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} < \frac{x^\alpha}{\alpha} \quad (x > 0, \alpha > 0) \end{array}$$

2 次の関数 f の導関数を求めよ．また $y = f(x)$ のグラフを描け．

$$(1) \frac{\log x}{x} \quad (x > 0) \quad (2) \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

（ここで $\tan^{-1}$ は逆正接関数の主値を表わすものとする．）

3 微分法の公式 $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を認めた上で $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ．

- 4 (1) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能で, $f(a) = f(b) = 0$ とする. また導関数 $f'(x)$ は増加関数とする. このとき $[a, b]$ で $f(x) \leq 0$ であることを示せ. (ヒント: ロルの定理を適用すると ...)
- (2) 関数 f は区間 I で微分可能で, 導関数 f' が増加関数ならば, f は凸関数であることを示せ.

宿題 6月7日(火) 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

- 1 次の関数の導関数を求めよ. (これらの関数が定義される範囲も示すこと.)

$$(1) \log(\log x) \quad (2) x^x$$

$$(3) \sin^{-1} \sqrt{x} \quad (4) \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$$

- 2 次の不等式を示せ:

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

- 3 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ を含むある区間 I で3回微分可能な関数とする. $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b) = 0$ であれば, $f^{(3)}(c) = 0$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在することを示せ. (これを一般化するとどんなことがいえるか考えてください.)

- 4 α を正実数として, 次の関数を考える:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

- (1) $f(x)$ が 0 で微分可能であるために α が満たすべき条件を求めよ.
- (2) $f(x)$ が $\mathbf{R}$ で C^1 級であるために α が満たすべき条件を求めよ.