微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.3　　　2016 年 5 月 19 日

宿題

$\boxed{1}$ 次の関数を，三角関数・逆三角関数を用いずに表わせ．またそのグラフを図示せよ．

(1)　$\sin^{-1}(\sin\theta)$,　$\theta \in \mathbf{R}$

$$y = \sin^{-1}\theta \Longleftrightarrow \sin y = \sin\theta \text{ かつ } y \in [\pi/2, \pi/2]$$

であることに注意する．

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ のときは　$\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$.

$\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ のときは　$-\pi/2 \leq \pi - \theta \leq \pi/2$ であって

$$\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin^{-1}(\sin(\pi - \theta)) = \pi - \theta.$$

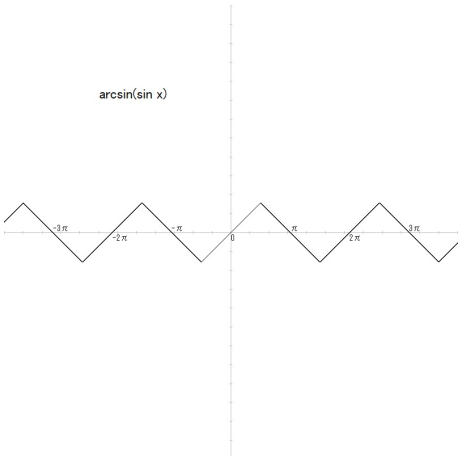
$\sin^{-1}(\sin\theta)$ はこれを，周期 2π をもつように拡張した関数である．

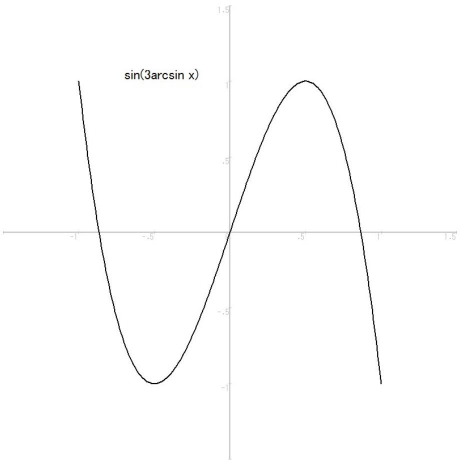
$$\sin^{-1}(\sin\theta) = \begin{cases} \theta - 2n\pi & (2n - 1/2)\pi \leq \theta \leq (2n + 1/2)\pi \\ \pi - \theta - 2n\pi & (2n + 1/2)\pi \leq \theta \leq (2n + 3/2)\pi \end{cases}$$

(2)　$\sin(3\sin^{-1}x)$,　$x \in [-1, 1]$

$\theta = \sin^{-1}x$ とおくと $x = \sin\theta$ である．

$$\sin(3\sin^{-1}x) = \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3x - 4x^3$$





$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ．ただし $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ は既知のこととして使ってよいとする．

(1)　$\theta = \tan^{-1}x$ とおくと $x = \tan\theta$ で, $x \to 0$ のとき $\theta \to 0$．したがって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 1$$

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ とおくと $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ で，$x \to \infty$ のとき $\theta \to +0$．したがって

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right) = \lim_{\theta\to+0} \frac{\theta}{\tan\theta} = 1$$

または $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right) = \lim_{x\to\infty} x \tan^{-1} \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan^{-1} t}{t} = 1$$

としてもよい．

$\boxed{3}$ $f(x)$ は 点 x_0 を含む区間 I で連続な関数で，$f(x_0) > 0$ とする．
このとき，$\delta > 0$ を，

『区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ に属する任意の x について $f(x) > 0$ が成り立つ』

となるようにとれることを証明せよ．

（解答例） $f(x)$ が x_0 で連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$(*) \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つような $\delta > 0$ を見出すことができる．

ここで，ε として $0 < \varepsilon \leq f(x_0)$ なる数をとり，この ε に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる．こうすれば $|x - x_0| < \delta$ のとき，$0 \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ だから，$f(x) > 0$ が成り立つ．

（ε として $f(x_0)$ をとり，$\cdots$ としてもよい.）

$\boxed{4}$ $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で定義された連続関数で，周期 1 をもつとする（すなわち $f(x+1) = f(x)$ が恒等的に成り立つとする）．

(1) $f(x)$ は最大値をとることを示せ．

(2) a を任意の実数とするとき，$f(x_0 + a) = f(x_0)$ を満たす点 x_0 が存在することを示せ．

（解答例）

(1) 有限な閉区間で連続な関数はその区間のある点で最大値をとるから，f はある点 $x_1 \in [0, 1]$ で $[0, 1]$ における最大値をとる．すなわち，すべての $x \in [0, 1]$ について $f(x) \leq f(x_1)$ が成り立つ．

次に $f(x_1)$ が f の $\mathbf{R}$ における最大値でもあることを示そう．$x \in \mathbf{R}$ に対して整数 n を $n \leq x < n$ となるようにとると（すなわち $n = [x]$ とすると），$x - n \in [0, 1]$ であり $f(x) = f(x - n) \leq f(x_1)$ が成り立つ．したがって，f は x_1 において $\mathbf{R}$ における最大値をとる．

(2) f が最大値をとる点の一つを x_1 とする．

$g(x) = f(x+a) - f(x)$ とおくと $g(x)$ は $\mathbf{R}$ で連続な関数で

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1+a) - f(x_1) \leq 0 \\ g(x_1-a) &= f(x_1) - f(x_1-a) \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ． $g(x_1) < 0,\ g(x_1-a) > 0$ ならば，中間値の定理により，x_1 と x_1-a の間に $g(x_0) = 0$ となる点 x_0 があり，$f(x_0+a) = f(x_1)$ を満たす．

$g(x_1) = 0$ ならば x_0 として x_1 とすればよい．また $g(x_1-a) = 0$ ならば x_0 として x_1-a とすればよい．