微分積分学A 演義 (S2, S6) No.3　　2016年5月19日

演習解答例

$\boxed{1}$

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\sin^{-1}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{5\pi}{6}$　(3) $\cos^{-1}(-1)=\pi$

(4) $\cos^{-1}\Big(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)=\dfrac{2\pi}{3}$　(5) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$　(6) $\tan^{-1}(2+\sqrt{3})$

$\boxed{2}$　$\boxed{}$ 内に適当な x の式を入れよ．

(1) $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ $(x\in(-1,1))$;　(2) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$ $(x\in\mathbf{R})$

$\sin^{-1}x=\tan^{-1}y$ が成り立っているとき x と y の関係を求めればよい．$\theta=\sin^{-1}x=\tan^{-1}y$ とおくと $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ で，このとき $\cos\theta>0$ である．

$$y=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$x=\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$\boxed{3}$

(1)
$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=\lim_{t\to\infty}\Big(1-\frac{1}{t}\Big)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\Big(\frac{t}{t-1}\Big)^t=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t-1}\Big(1+\frac{1}{t-1}\Big)^{t-1}=e.$$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to+0}(1+t)^{1/t}=\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=e$　また　$\displaystyle\lim_{t\to-0}(1+t)^{1/t}=\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=e$

したがって $\displaystyle\lim_{t\to+0}(1+t)^{1/t}=e$.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\log(1+t)^{1/t}=\log\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}=\log e=1$

（$\log x$ が（$x=e$ で）連続だから））

$\boxed{4}$ $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続な関数で $0\leq f(x)\leq 1$ を満たすとする．このとき $f(c)=c$ を満たす点 $c\in[0,1]$ が存在することを証明せよ．

（解答例）$g(x)=f(x)-x$ $(x\in[0,1])$ とおくと $g(0)=f(0)\geq 0$，$g(1)=f(1)-1\leq 0$ となる．$g(0)=0$ なら $c=0$, $g(1)=0$ なら $c=1$ とすれば $g(c)=0$ となる．$g(0)>0$ かつ $g(1)<0$ ならば，中間値定理より $g(c)=0$ となる $c\in(0,1)$ が存在する．いずれにしても $g(c)=0$ となる c が区間 $[0,1]$ 内に存在し，そこでは $f(c)=c$ となる．

$\boxed{5}$ $\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \lim_{y\to b} g(y) = c$ ならば $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$ といえるか？

誤りである．

（反例）$\mathbf{R}$ 上の関数 f, g を $f(x) = b$（定数関数），$g(y) = \begin{cases} c & (y \neq b) \\ c' \neq c & (y = b) \end{cases}$ によって定める．$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \lim_{y\to b} g(x) = c$ である．一方，$g(f(x))$ は恒等的に値 c' をとるから $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c' \neq c$

注 1　「x が a に近づくとき $f(x)$ が<u>（あ）b に近づく</u>」，

「y が<u>（い）b に近づく</u>とき $g(y)$ が c に近づく」

というとき,（あ）と（い）では意味が違う.（あ）では $f(x)$ が b という値をとることがあってもよいが,（い）では y は b という値をとらずに b に近づくことを要求している.

注 2　「$g(y)$ が b で連続」という条件を付け加えれば正しい命題になる．すなわち

『$\lim_{x\to a} f(x) = b$ で $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$ ならば $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$』

は成り立つ.（$\boxed{3}$ (3) でこれを使った.）$\varepsilon - \delta$ 論法で証明してみてください.