微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.3　　2016 年 5 月 19 日

関数の極限，連続関数

定義（関数の極限）

(1) I を区間とし，x_0 はこの区間内の点とする．f を I から点 x_0 を除いたところで定義された関数とする．

（注：$f(x_0)$ は定義されていてもよいが，$f(x_0)$ の値は，以下の極限の定義と無関係である．）

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0) \qquad \text{または} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

によって，$x (\neq x_0)$ が x_0 に近づくとき $f(x)$ が A に近づくことを表わす．すなわち

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \big(0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$

(2) f を区間 (a, b) の上の関数として，$f(x) \to A \ (x \to a+0)$ または $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$ によって，x が a に右から近づくとき $f(x)$ が A に近づくことを表わす．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \big(0 < x - a < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$

(3) f を区間 (a, ∞) の上の関数として，$f(x) \to A \ (x \to \infty)$ または $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ によって，x が限りなく大きくなるとき $f(x)$ が A に近づくことを表わす．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R \in \mathbf{R},\ \big(x > R \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon\big)$$

(4) f を区間 (a, b) の上の関数として，$f(x) \to \infty \quad (x \to a+0)$ または $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ によって，x が a に右から近づくとき $f(x)$ が限りなく大きく なることを表わす．

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \big(0 < x - a < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M\big)$$

(*) その他の類似の場合も同様に定義される．

例 $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

定義（連続関数）　関数 $f : I \to \mathbf{R}$ が点 x_0 において連続であるとは $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つことをいう．言い換えれば

「どんな $\varepsilon > 0$ を考えても，それに応じて十分小さい $\delta > 0$ をとれば，$(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ が成り立つ」

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

f が区間 I の各点で連続のとき，f は I で連続であるという．

定理（関数の連続性の数列による表現）　関数 $f : I \to \mathbf{R}$ が点 x_0 において連続であることは，次のことと同値である．

$\lim_{n \to \infty} = x_0$ となる任意の点列 $\{x_n\}_n$ について，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ が成り立つ．

連続関数の性質について重要な定理を挙げる．

中間値の定理　f は閉区間 $I=[a,b]$ で連続な関数で．$f(a)\neq f(b)$ とする．f は $f(a)$ と $f(b)$ の間のあらゆる値をとる．すなわち，$f(a)<\gamma<f(b)$ または $f(a)>\gamma>f(b)$ となる任意の実数 γ に対して，$f(c)=\gamma$ となる点 $c\in(a,b)$ が存在する．

定理（連続関数の最大値・最小値）　f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続な関数ならば f は I で最大値（最小値）をとる．すなわち 点 $x_0\in I$ が存在して，すべての $x\in I$ について $f(x)\leq f(x_0)$ が成り立つ．

定義（一様連続性）　関数 f が 区間 I で一様連続であるとは次が成り立つことをいう：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ (|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$$

定理　関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続ならば，そこで一様連続である．

逆関数　f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続で狭義増加すなわち $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$（または 狭義減少 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$）ならば f は I から $J=[f(a),f(b)]$（または $J=(f(b),f(a))$ の上への 1 対 1 写像（全単射）である.（全射であることは中間値定理による.）

したがって逆関数 $f^{-1}:J\to I$ が定義できる．

定理（逆関数の連続性）　上で定めた f^{-1} は連続関数である．

指数関数　$a>0$ とする．$\mathbf{R}$ で連続な関数 $f(x)$ で次の条件を満たすものがただ一つある．これを a^x と表わす．

(1) $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)\quad(x_1,x_2\in\mathbf{R})$；　　(2) $f(1)=a$.

- 特に $a^0=1$．自然数 n に対して $a^n=a\cdots a$（n 個の積）, $a^{-n}=1/(a^n)$．有理数 $m/n(n\in\mathbf{N},m\in\mathbf{Z})$ に対して $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$.
- $a>1$ の場合, a^x は 狭義増加で $\lim_{x\to-\infty}a^x=0,\ \lim_{x\to\infty}a^x=\infty.$
- $0<a<1$ の場合, a^x は 狭義減少で $\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}a^x=0.$

対数関数　$a>0,\ a\neq1$ のとき，指数関数 a^x は $\mathbf{R}$ から $(0,\infty)$ の上への 1 対 1 写像．その逆関数を $\log_a y$ で表わす．すなわち

$x=\log_a y\Longleftrightarrow y=a^x$

逆三角関数

(1) $\boldsymbol{\sin^{-1} x}$： $\sin\theta$ の定義域を $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限すると，そこでは狭義増加関数で，逆関数が $[-1,1]$ で定まる．これを $\sin^{-1} x$ （または $\arcsin x$，$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$，$\mathrm{Arcsin}\, x$）と表わす．

$$\theta = \sin^{-1} x \iff \bigl(x = \sin\theta,\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\bigr)$$

(2) $\boldsymbol{\cos^{-1} x}$： $\cos\theta$ の定義域を $[0,\pi]$ に制限すると，そこでは狭義減少関数で，逆関数が $[-1,1]$ で定まる．これを $\cos^{-1} x$ （または $\arccos x$，$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$，$\mathrm{Arccos}\, x$）と表わす．

$$\theta = \cos^{-1} x \iff \bigl(x = \cos\theta,\ \theta \in [0, \pi]\bigr)$$

(3) $\boldsymbol{\tan^{-1} x}$： $\tan\theta$ の定義域を $(-\pi/2, \pi/2)$ に制限すると，そこでは狭義増加関数で，逆関数が $\mathbf{R}$ で定まる．これを $\tan^{-1} x$ （または $\arctan x$，$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$，$\mathrm{Arctan}\, x$）と表わす．

$$\theta = \tan^{-1} x \iff \bigl(x = \tan\theta,\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\bigr)$$

演習

$\boxed{1}$ 次の値は何か？

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (3) $\cos^{-1}(-1)$

(4) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (5) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (6) $\tan^{-1}(2+\sqrt{3})$

$\boxed{2}$ $\boxed{}$ 内に適当な x の式を入れよ．

(1) $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\boxed{}$ (2) $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\boxed{}$

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ．ただし $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ は既知のこととして使ってよいとする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$ (3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}$

$\boxed{4}$ $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続な関数で $0 \le f(x) \le 1$ を満たすとする．このとき $f(c) = c$ を満たす点 $c \in [0,1]$ が存在することを証明せよ．

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \lim_{y\to b} g(y) = c$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$ といえるか？正しければ証明し，誤りなら反例を挙げよ．

宿題　5 月 24 日 (火) 11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

$\boxed{1}$ 次の関数を，三角関数・逆三角関数を用いずに表わせ．またそのグラフを図示せよ．

(1) $\sin^{-1}(\sin\theta),\ \ \theta \in \mathbf{R}$　　(2) $\sin(3\sin^{-1} x),\ \ x \in [-1, 1]$

（ヒント： (1) は x の周期関数であることに注意する）

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ．ただし $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ は既知のこととして使ってよいとする．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$

$\boxed{3}$ $f(x)$ は 点 x_0 を含む区間 I で連続な関数で， $f(x_0) > 0$ とする．

このとき，$\delta > 0$ を，

『区間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ に属する任意の x について $f(x) > 0$ が成り立つ』

となるようにとれることを証明せよ．

$\boxed{4}$ $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で定義された連続関数で，周期 1 をもつとする（すなわち $f(x+1) = f(x)$ が恒等的に成り立つとする）．

(1) $f(x)$ は最大値をとることを示せ．

(2) a を任意の実数とするとき，$f(x_0 + a) = f(x_0)$ を満たす点 x_0 が存在することを示せ．