

宿題解答例

- 1 $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{b_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. 数列 $\{b_n\}_n$ は収束することを示し, この極限を求めよ.

(解答例 1) 明らかに b_n はすべて正である. 相加相乗平均の不等式から

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{b_n} \geq 2\sqrt{\frac{b_n}{2} \cdot \frac{1}{b_n}} = \sqrt{2} \quad (n \geq 1)$$

で, $b_1 = 3/2$ だから, すべての n について $b_n \geq \sqrt{2}$ が成り立つ.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b_n^2} \leq 1$$

だから $\{b_n\}$ は下に有界な減少列であり, 収束する. その極限を β とすると, $\beta \geq 0$ で $\beta = \beta/2 + 1/\beta$ が成り立つ. したがって $\beta = \sqrt{2}$ である.

(解答例 2) b_{n+1} と $\sqrt{2}$ の差を調べる.

$$(*) \quad b_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{b_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}b_n}{2b_n} = \frac{(b_n - \sqrt{2})^2}{2b_n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

これより $n \geq 2$ のとき $b_n > \sqrt{2}$ である. また $b_1 = 3/2$ だから $n = 1$ のときも $b_n > \sqrt{2}$ である.

$$0 < \frac{b_n - \sqrt{2}}{2b_n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2b_n} < \frac{1}{2}$$

だから

$$0 < b_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(b_n - \sqrt{2}).$$

これより

$$0 < b_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - \sqrt{2})$$

したがって b_n は $\sqrt{2}$ に収束する.

(解答例 3) (解答例 2) の (*) により

$$0 < b_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(b_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つが, これを次のように書きなおす.

$$0 < \frac{b_{n+1} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \leq \left(\frac{b_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

したがって

$$0 < \frac{b_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \leq \left(\frac{b_1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{3/2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

この右辺が 0 に収束するから b_n は $\sqrt{2}$ に収束する.

(解答例 4) (解答例 2) の (*) と同様に

$$b_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(b_n + \sqrt{2})^2}{2b_n}$$

が成り立つ. これより

$$\frac{b_{n+1} - \sqrt{2}}{b_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + \sqrt{2}} \right)^2.$$

したがって

$$\frac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{b_1 - \sqrt{2}}{b_1 + \sqrt{2}} \right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{3/2 - \sqrt{2}}{3/2 + \sqrt{2}} \right)^{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

これが $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するから b_n は $\sqrt{2}$ に収束する.

・ 演習 [3] の数列 $\{a_n\}_n$ は

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \frac{577}{408}, \frac{3363}{2378}, \frac{19601}{13860}, \frac{114243}{80782}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

一方 $\{b_n\}_n$ は

$$\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

で, $\{b_n\}_n$ は $\{a_n\}$ の部分列である. $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_4, b_4 = a_8, b_5 = a_{16}, \dots$ (なぜか? 上の解答例の中にヒントがあります.)

・ $\{b_n\}$ は急速に収束する. ($b_{n+1} - \sqrt{2}$ は $b_n - \sqrt{2}$ の 2 乗より小さいから.) $\sqrt{2}$ の近似値の計算に利用できる. $b_4 = \underline{1.41421356237469\dots}$ で小数第 11 位まで $\sqrt{2}$ の正しい値に一致する.

[2] 数列の収束の定義 『 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$ 』において, $\forall \varepsilon$ と $\exists N$ を入れ替えてできる条件

$$『\exists N \in \mathbf{N}, \forall \varepsilon > 0 \quad (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)』$$

を満たすのはどんな数列か?

(解答例) 条件を満たす数列 $\{a_n\}_n$ は, ある番号 N 以降の n について a_n が α に一致する数列である. 限定記号を使って表わせば 『 $\exists N \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \implies a_n = \alpha)$ 』.

(補足説明) 『 $\forall \varepsilon > 0 \quad (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$ 』は, ε が正実数で, n が N 以上の番号ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つと言っている. すなわち, n が N 以上ならば, $|a_n - \alpha|$ はどんな正数よりも小さいから, $a_n = \alpha$ である. このような N が存在するというのが, 問題の条件である.

[3] 数列 $\{a_n\}_n$ に対して, 数列 $\{c_n\}_n$ を $c_n = \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n)$ で定める.

(1) $\{a_n\}_n$ が 0 に収束するならば $\{c_n\}$ も 0 に収束することを証明しよう. すなわち次のことを示そう:

(*) 『どんな $\varepsilon > 0$ が与えられても, 番号 N を ($n \geq N$ ならば $|c_n| < \varepsilon$) となるようにとれる』

$\varepsilon > 0$ がひとつ与えられたとする.

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するから, 番号 N_0 を『 $n \geq N_0$ ならば $|a_n| < \varepsilon/2$ 』となるようにとれる. この N_0 を固定して, N_0 以上の番号 n について $|c_n|$ の大きさを評価しよう. 三角不等式により

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2}(|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|)$$

であるが, この右辺を次のように 2 つの部分に分ける:

$$\frac{1}{n^2}M + \frac{1}{n^2}(N_0|a_{N_0}| + (N_0+1)|a_{N_0+1}| + \cdots + n|a_n|).$$

ただし $M = |a_1| + 2|a_2| + \cdots + (N_0-1)|a_{N_0-1}|$ とおいた.

第 2 の部分は $\boxed{\text{ア}} (\varepsilon, N_0, n \text{ の式})$ より小さい. これは N_0, n によらず $\boxed{\text{イ}}$ より小さい.

番号 N を $N > \boxed{\text{ウ}}$ となるようにとる.

こうすれば $n \geq N$ のとき第 1 の部分は $\varepsilon/2$ より小さくなり, 第 2 の部分とあわせて $|c_n| < \varepsilon$ が成り立つ.

これがどんな $\varepsilon > 0$ についても成り立つのだから (*) が示された.

(2) $\{a_n\}_n$ が α に収束するならば $\{c_n\}$ も収束し, その極限値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

これを証明するために

$$a'_n = a_n - \alpha, \quad c'_n = \frac{1}{n^2}(a'_1 + 2a'_2 + \cdots + na'_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって数列 $\{a'_n\}_n, \{c'_n\}_n$ を定める.

$\{a_n\}_n$ が α に収束すれば $\{a'_n\}_n$ は 0 に収束し, (1) により $\{c'_n\}_n$ も 0 に収束する. ここで $c_n = \boxed{\text{オ}}$ だから $\{c_n\}_n$ は $\boxed{\text{エ}}$ に収束する.

$$(\text{ア}) \quad \frac{n(n+1) - (N_0-1)N_0}{4n^2}\varepsilon, \text{ または } \frac{n - N_0 + 1}{2n}\varepsilon, \text{ または } \frac{n+1}{4n}\varepsilon$$

$$(\text{イ}) \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{ウ}) \quad \max\left(N_0, \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}\right) \quad (\text{エ}) \quad \frac{\alpha}{2} \quad (\text{オ}) \quad c'_n + \frac{(n+1)\alpha}{2n}$$

(3) $\{c_n\}$ が収束しても $\{a_n\}_n$ が収束するとは限らない. このような例を挙げよ.

(例) 数列 $\{a_n\}_n$ を, n が奇数のとき $a_n = 0$, n が偶数のとき $a_n = 1$ と定める. この数列は収束しない. c_n は, n が偶数のときは

$$c_n = \frac{1}{n^2}\{2 + 4 + \cdots + n\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}$$

n が奇数のときは

$$c_n = \frac{1}{n^2}\{2 + 4 + \cdots + (n-1)\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n^2}$$

となる. よって $\{c_n\}_n$ は $\frac{1}{4}$ に収束する.

(注) 数列 $\{a_n\}$ に対して, 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n), \quad c_n = \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)$$

で定めて, (A) $\{a_n\}_n$ が収束する. (B) $\{b_n\}_n$ が収束する. (C) $\{c_n\}_n$ が収束する.

という命題を考える. (A) $\Rightarrow$ (B) および (A) $\Rightarrow$ (C) が成り立つことがわかっている. それでは (B) $\Rightarrow$ (C), (C) $\Rightarrow$ (B) の一方または両方が成り立つだろうか? 考えてみてください.