

演習解答例

1 $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定まる数列を考える.

(1) ある番号 N があって, $n \geq N$ ならば $a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n$ が成り立つことを示せ.

(2) この数列が 0 に収束することを示せ.

(解答例)

(1) 隣り合う 2 項の比は $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ ($n = 1, 2, \dots$) である.

これは $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2}$ に収束する. したがって, 番号 N があって, 『 $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{6}$ 』 が成り立つ. このとき $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3}$ が成り立つ.

(注) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ は減少列で $\frac{a_7}{a_6} = \frac{49}{72} > \frac{2}{3} > \frac{a_8}{a_7} = \frac{32}{49}$ だから, N は 7 以上であればよい.)

(2) (1) により $0 < a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-N} a_N$. この右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するから, (はさみうちの原理により) a_n も 0 に収束する.

(次のように議論してもよい: 数列 $\{a_n\}_n$ は (各項が正だから) 下に有界で, $n \geq 7$ では減少列だから収束する. この極限を α とすると, (1) の不等式の極限をとって $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\alpha$. よって $\alpha = 0$.)

(注) 次の定理 (はさみうちの原理) が成り立つ. $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす 3 つの数列があって, $\{a_n\}_n, \{c_n\}_n$ が同じ値 α に収束するならば, $\{b_n\}_n$ も同じ α に収束する. (収束の定義に基いて証明してください.)

2 数列 $\{a_n\}_n$ が正の実数 α に収束するならば, $a_n \leq 0$ となる n は有限個しかない. 収束の定義に基いてこれを証明せよ.

(解答例) この数列が α に収束するから, どんな正数 ε を考えても, 番号 N を, 『 $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 』 となるようにとれる. そこで, ε として $0 < \varepsilon \leq \alpha$ となるものを考えて, この ε に対して番号 N を上のようにとると, $n \geq N$ ならば, $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$ より $a_n > \alpha - \varepsilon \geq 0$ となる. よって $a_n \leq 0$ となる可能性があるのは $n < N$ のときだけで, このような n は有限個 (多くても $N - 1$ 個) しかない.

(注) 「 ε として $0 < \varepsilon \leq \alpha$ となるものを考える」というところを, 「 $0 < \varepsilon < \alpha$ となるものを考える」または「 $\varepsilon = \alpha$ の場合を考える」などとしてもよい.

3 $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. この数列が $\sqrt{2}$ に収束することを示したい. 次の 2 通りの方法を試みよ.

(1) $|a_n - \sqrt{2}|$ が 0 に収束することを示す.

(解答例) まず, 明らかに a_n はすべて正である.

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(3 - 2\sqrt{2})|a_n - \sqrt{2}|}{2a_n + 3} \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}|a_n - \sqrt{2}| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

したがって

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$$

この右辺が 0 に収束するから a_n は $\sqrt{2}$ に収束する.

(注) 帰納法により $a_n > \sqrt{2}$ がわかるから, より精密に次が示される.

$$0 < a_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}\right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2})^{2n-1}.$$

(2) (1) の方法では $\sqrt{2}$ という数が存在することを始めから認めていた. $\sqrt{2}$ が存在するかどうかかわからないとして証明するために, 次のように考える.

(a) 明らかに $a_n > 0$. よってこの数列は下に有界である.

(b) $a_{n+1} - a_n < 0$ であることを帰納法で示そう.

まず $n = 1$ のときは $a_2 - a_1 = 17/12 - 3/3 < 0$ である.

$n \geq 2$ として, $a_n - a_{n-1} < 0$ が既に表示されているとする. このとき

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3)}$$

だから $a_{n+1} - a_n < 0$

(c) 上の (a), (b) より, この数列が下に有界な減少列であり, 収束することがわかった. この極限を α とする. 与えられた漸化式で $n \rightarrow \infty$ とした極限をとると $\alpha = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ が成り立つ. これより $\alpha^2 = 2$ が成り立つ. また $\alpha > 0$ である.

この方法によれば, $\sqrt{2}$ という数 (すなわち, 自乗すると 2 になる正の実数) が確かに存在することを証明したことになる..