微分積分学 A 演義 (S2, S6) No.2　　　2016 年 4 月 28 日

数列

数列とは　実数を $a_1, a_2, a_3, \ldots$ と並べたものを数列という．言い換えれば数列とは，自然数 n のそれぞれに実数 a_n を対応させる写像（＝関数）である．これを $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ または $\{a_n\}_n$ のように表わす．

（注）　数列 $\{a_n\}_n$ と，この数列の項として現れる実数からなる集合 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は別のものである．例えば $1, 0, 1, 0, \ldots$ と $1, 0, 0, 0, \ldots$ は異なる数列だが，その項として現れる実数の集合はどちらも $\{0, 1\}$ である．省略して $\{a_n\}$ と書いてあるとき，これが数列であるか集合であるかは文脈で判断する．

定義（数列の収束）　数列 $\{a_n\}_n$ が α に収束するとは：

「どんな正の数 ε を考えても，或る番号 N 以降の n については $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」

　すなわち　　$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$

　または　　$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$

数列 $\{a_n\}_n$ が収束するとは，ある数 α があって $\{a_n\}_n$ が α に収束すること．

定義（有界な数列）　数列 $\{a_n\}_n$ が上に有界であるとは，実数 M があって，すべての n について $a_n \leq M$ となること．下に有界であるとは，実数 M' があって，すべての n について $a_n \geq M'$ となること．

定理（有界単調数列）　上に有界な増加数列は収束する．（同様に，下に有界な減少数列は収束する．）

　すなわち，数列 $\{a_n\}$ について，(1) $\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq M$ かつ (2) $\forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq a_{n+1}$ が成り立てば，この数列はある実数 α に収束する．（$\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ である．）

例　数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ は上に有界な増加数列である．この極限 $e = 2.718\ldots$ を（Napier の数，自然対数の底）という．

定理（極限の四則演算・大小関係）　$a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta \quad (n \to \infty)$ とする．このとき

　(1)　$a_n \pm b_n \to \alpha \pm \beta \quad (n \to \infty)$

　(2)　$a_n b_n \to \alpha\beta \quad (n \to \infty)$

　(3)　$a_n / b_n \to \alpha / \beta \quad (n \to \infty)$（ただし $\beta \neq 0$ とする）

　(4)　$a_n \leq b_n$ となる n が無限に多くあれば $\alpha \leq \beta$

例題　$|c| < 1$ のとき $a_n = c^n\ (n = 1, 2, \ldots)$ で定まる数列は 0 に収束する．

　（証明）$0 < c < 1$ のときを考える．この数列は下に有界な減少数列だから収束する．極限を α とすると $\alpha \geq 0$ である．$a_{n+1} = c a_n$ の極限をとると $\alpha = c\alpha$．これより $\alpha = 0$ である．（前定理を用いた．どう用いたか考えてください．）

定理（縮小区間列の原理）　$I_n = [a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \ldots$ を $\mathbf{R}$ における縮小閉区間列（すなわち $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ となっている）とする．

(1) これらの閉区間の共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ は空集合ではない．

(2) $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ はただ 1 点からなる．

定義（部分列）　数列 $\{a_n\}_n$ に対して，増加自然数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ をとって，この番号の項を取り出して並べた数列 $\{a_{n_k}\}_k$： $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ を $\{a_n\}_n$ の部分列という．

定理（ボルツァノ・ワイエルシュトラス）　$\{a_n\}$ が 有界な数列ならば，その適当な部分列 $\{a_{n_k}\}_k$ で収束するものを取り出すことができる．

例題　数列 $\{a_n\}_n$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定める．$\{a_n\}_n$ が α に収束するならば $\{b_n\}_n$ も同じ α に収束する．

演習

$\boxed{1}$ $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$ で定まる数列を考える．

(1) ある番号 N があって，$n \geq N$ ならば $a_{n+1} \leq \dfrac{2}{3} a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) この数列が 0 に収束することを示せ．

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}_n$ が正の実数 α に収束するならば，$a_n \leq 0$ となる n は有限個しかない．収束の定義に基いてこれを証明せよ．(ヒント：ある番号以降からは a_n がすべて正にとなることを示せばよい．)

$\boxed{3}$ $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$ とおく．この数列が $\sqrt{2}$ に収束することを示したい．次の 2 通りの方法を試みよ．

(1) $|a_n - \sqrt{2}|$ が 0 に収束することを示す．

(2) (1) の方法では $\sqrt{2}$ という数が存在することを始めから認めていた．$\sqrt{2}$ が存在するかどうかわからないとして証明するために，次のように考える．

(a) $\{a_n\}_n$ が下に有界であることを確かめる．

(b) $a_{n+1} - a_n < 0$ であることを帰納法で示す．

(c) 上のことから，この数列は収束する．極限を α とするとき $\alpha^2 = 2$ であることを確かめる．

宿題　5月10日(火) 11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

$\boxed{1}$ $b_1 = \dfrac{3}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{1}{b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とおく．数列 $\{b_n\}$ は収束することを示し，この極限を求めよ．

（注）演習 $\boxed{3}$ の数列 $\{a_n\}_n$ と，この問題の $\{b_n\}_n$ の間には関係がある．どんな関係があるか考えてください．

$\boxed{4}$ 数列の収束の定義　『$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}\quad (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$』　において，$\forall\varepsilon$ と $\exists N$ を入れ替えてできる条件

『$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall\varepsilon > 0\quad (n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon)$』

を満たすのはどんな数列か？

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}_n$ に対して，数列 $\{c_n\}_n$ を $c_n = \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)$ で定める．

(1) $\{a_n\}_n$ が 0 に収束するならば $\{c_n\}$ も 0 に収束することを証明しよう．すなわち次のことを示そう：

（$*$）『どんな $\varepsilon > 0$ が与えられても，番号 N を（$n \geq N$ ならば $|c_n| < \varepsilon$）となるようにとれる』

$\varepsilon > 0$ がひとつ与えられたとする．

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するから，番号 N_0 を『$n \geq N_0$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$』となるようにとれる．この N_0 を固定して，N_0 以上の番号 n について $|c_n|$ の大きさを評価しよう．三角不等式により

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2}(|a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n|)$$

であるが，この右辺を次のように 2 つの部分に分ける：

$$\frac{1}{n^2}M + \frac{1}{n^2}\Big(N_0|a_{N_0}| + (N_0+1)|a_{N_0+1}| + \cdots + n|a_n|\Big).$$

ただし　$M = |a_1| + 2|a_2| + \cdots + (N_0 - 1)|a_{N_0-1}|$　とおいた．

第 2 の部分は $\boxed{\text{ア}\ (\varepsilon, N_0, n\ \text{の式})}$ より小さい．これは N_0, n によらず $\boxed{\quad\text{イ}\quad}$ より小さい．

番号 N を $N > \boxed{\quad\text{ウ}\quad}$ となるようにとる．

こうすれば $n \geq N$ のとき第 1 の部分は $\varepsilon/2$ より小さくなり，第 2 の部分とあわせて $|c_n| < \varepsilon$ が成り立つ．

これがどんな $\varepsilon > 0$ についても成り立つのだから（$*$）が示された．

(2) $\{a_n\}_n$ が α に収束するならば $\{c_n\}$ も収束し，その極限値は $\boxed{\quad\text{エ}\quad}$ である．

これを証明するために

$$a'_n = a_n - \alpha, \quad c'_n = \frac{1}{n^2}(a'_1 + 2a_2 + \cdots + na'_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって数列 $\{a'_n\}_n$, $\{c'_n\}_n$ を定める．

$\{a_n\}_n$, が α に収束すれば $\{a'_n\}_n$ は 0 に収束し，(1) により $\{c'_n\}_n$ も 0 に収束する．ここで $c_n = \boxed{\text{オ}}$ だから $\{c_n\}_n$ は $\boxed{\text{エ}}$ に収束する．

(3) $\{c_n\}$ が収束しても $\{a_n\}_n$ が収束するとは限らない．このような例を挙げよ．

（注） 数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n), \quad c_n = \frac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)$$

で定めて，(A) $\{a_n\}_n$ が収束する．(B) $\{b_n\}_n$ が収束する．(C) $\{c_n\}_n$ が収束する．

という命題を考える．(A)⇒(B) および (A)⇒(C) が成り立つことがわかっている．それでは (B)⇒(C), (C)⇒(B) の一方または両方が成り立つだろうか？考えてみてください．