宿題解答例

1 $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A, B \subset X$ とする.

(1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ.

(解答例) $y \in f(A \cap B)$ とすると, $A \cap B$ の要素 x で, $f(x) = y$ となるものが存在する. この x は A に属しているから $y = f(x)$ は $f(A)$ に属している. 同様に x は B にも属しているから $y = f(x)$ は $f(B)$ にも属している, したがって y は $f(A) \cap f(B)$ に属している.

(2) $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ となる $f: X \rightarrow Y$ と A, B の (できるだけ簡単な) 例を挙げよ.

(例) X を 2 つの要素 a, b からなる集合 $X = \{a, b\}$ とし, Y をただ 1 つの要素 c からなる集合 $Y = \{c\}$ とする. 写像 f を, $f(a) = f(b) = c$ によって定める. また $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ とする. $A \cap B = \emptyset$ だから $f(A \cap B) = \emptyset$, 一方 $f(A) \cap f(B) = \{c\}$ は空集合ではない.

(注) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射でなければ $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ となる A, B を見つけることができる. どうすればよいか考えてください.

2 x は実数で, 任意の自然数 n に対して $|x| < 1/n$ が成り立つとする. このとき $x = 0$ であることを示せ.

(解答例) 背理法で証明する. そのために

(*) 0 でない実数 x で, 任意の自然数 n について $|x| < 1/n$ となるものが存在すると仮定する.

上の不等式の両辺に正数 $n/|x|$ をかけると $n < 1/|x|$ が得られる. これは $1/|x|$ という実数が, あらゆる自然数より大きいことを意味し, アルキメデスの原理に反している.

したがって仮定 (*) が誤りであることが示された.

3 A, B は $\mathbf{R}$ の空でない部分集合で, 上に有界とする.

(1) 「 A に属する数 a のどれを考えても, その a より以上の数を B の中に見い出すことができる」ならば, $\sup A \leq \sup B$ が成り立つことを示せ.

(解答例 1) a を A の要素とすると, この a に対して, $a \leq b$ となる B の要素 b を見出せる. この b は $\sup B$ より以下である. したがって A の要素はすべて $\sup B$ より以下である. 言い換えれば, $\sup B$ は集合 A の上界のひとつである. A の上界のうちで最小のものが $\sup A$ なのだから $\sup A \leq \sup B$ が成り立つ.

(解答例 2) 対偶, すなわち, 『 $\sup B < \sup A$ であれば, A に属する要素であって, B の要素のどれよりも大きいものが存在する』を証明する. (背理法によるといってもよい).

$\sup B < \sup A$ とすると $\sup B$ は集合 A の上界ではない. よって, A の要素 a で $\sup B < a$ となるものが存在する. B の要素 b はすべて, $b \leq \sup B$ を満たし, したがって $b < a$ を満たす. すなわち, a は B の要素のどれよりも大きい.

(注1) 問題の条件を限定記号を用いて表わすと「 $\forall a \in A, \exists b \in B, a \leq b$ 」です. これは「 $\exists b \in B, \forall a \in A, a \leq b$ 」(B の要素で, A の要素のどれよりも以上のものがある)とは違います.

(注2) 『 $\sup A \in A$ 』も『 $x < \sup A$ ならば $x \in A$ 』も, 一般には成り立ちません. 『 $x \in A$ ならば $x \leq \sup A$ 』は正しいが, その逆は成り立ちません.

(2) 上の逆は成り立つか? 正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

(解答) 逆は成り立たない. 反例としては $\sup A = \sup B$ で, A には最大数が存在し, B には最大数が存在しないものを挙げればよい. ($\sup A = \max A$ は A に属しているが, それより以上の B の要素は存在しない.) このような具体例はいくらでも挙げられる. 例えば

(反例1) $A = \{0\}, B = \{-1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$

(反例2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}, B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$

4 U君の質問:

「アルキメデスの原理 (どんな実数 x に対しても, それより大きい自然数 n が見つけられる) の証明って, どうしてこんなに回りくどいのですか? x を小数で表わして, その小数点以下を切り上げたものを n とするといえば証明が済むのではないですか?」

U君が納得するような説明をしてあげてください.

(解答例)

「 x が整数のとき, その小数点以下を切り上げたものは x だから x より大きくなりません, また「 $x \leq 0$ のとき, その小数点以下を切り上げたもの n は $n \leq 0$ となるので自然数ではありません」というのは確かにその通りです. しかし, U君が聞きたかったのは, おそらくその点ではないので, 質問を

「 $x > 0$ ならば x を小数で表わして, その小数点以下を切り捨てたものに 1 を加えた数を n とする, $x \leq 0$ ならば $n = 1$ とするといえば証明が済むのではないですか?」

と訂正して, それに答えます.

(1) 訂正された質問のように n を決めれば, それは x より大きい自然数であるというのは確かにその通りである.

(2) しかし, これは実数を (有限または無限) 小数で表わすことができるという事実を前提としている.

(3) 実数を小数で表わすことができるというのは正しいが, それを証明するには, アルキメデスの原理を (またはそれと同等の命題を) 用いなくてはならない.

(4) したがって, 実は, 小数を持ち出す方が回りくどい議論になっている.