

演習解答例

1 次の集合の上限, 下限, 最大数, 最小数を (存在すれば) 求めよ:

$$(1) A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, \quad (2) B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$$

(1) A の上限 $\sup A = 1$, 下限 $\inf A = 1/2$,
最大数 $\max A$ は存在しない. 最小数 $\min A = 1/2$.

(2) B の上限 $\sup B = 3/2$, 下限 $\inf B = -1$,
最大数 $\max B = 3/2$. 最小数 $\min B$ は存在しない.

2 自然数全体からなる集合 $\mathbf{N}$ は上に有界ではない. (アルキメデスの原理)

(証明) 背理法による. $\mathbf{N}$ が上に有界であると仮定すると, 実数の連続性より $\mathbf{N}$ の上限 $\sup \mathbf{N}$ が存在する. これを s とする.

s は $\mathbf{N}$ の 上界である から, すべての 自然数 n について $n \leq s$ が成り立つ (*).

一方, $s - 1$ は $\mathbf{N}$ の 上界ではない から, 少なくとも1つの 自然数 m について $s - 1 < m$ が成り立つ. このとき自然数 $m + 1$ について $s < m + 1$ が成り立つことになり (*) と矛盾する.

よって $\mathbf{N}$ が上に有界であるという仮定は正しくない.

3 X, Y を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合として次の8個の命題を考える.

- | | |
|--|--|
| (a) $\forall x \in X, \forall y \in Y, x < y;$ | (a') $\forall y \in Y, \forall x \in X, x < y$ |
| (b) $\forall x \in X, \exists y \in Y, x < y;$ | (b') $\exists y \in Y, \forall x \in X, x < y$ |
| (c) $\exists x \in X, \forall y \in Y, x < y;$ | (c') $\forall y \in Y, \exists x \in X, x < y$ |
| (d) $\exists x \in X, \exists y \in Y, x < y;$ | (d') $\exists y \in Y, \exists x \in X, x < y$ |

(1) 上の命題をできるだけ自然な日本語で言い表せ. また,

$X = \{2, 4, 6, \dots\}$ (正の偶数全体), $Y = \{1, 3, 5, \dots\}$ (正の奇数全体)

とすると上の命題は真か偽か, 簡単な理由をつけて答えよ.

(解答例) 日本語として, いろいろな表現が考えられる. 各自で工夫してください.

(a) 集合 X の要素 x と集合 Y の要素 y のどの組み合わせについても, $x < y$ が成り立つ. — 偽である. (例えば $2 \in X, 1 \in Y$ については $2 < 1$ ではないから.)

- (b) 集合 X のどの要素 x をとってみても、その x より大きい Y の要素 y を見つけることができる. — 真である. (どんな $x \in X$ をとってみても、それより大きい Y の要素として $x+1$ がとれるから.)
- (c) 集合 X の要素 x で、 Y の要素のどれよりも小さいものが存在する. — 偽である. (X のどの要素も $1 \in Y$ より小さくはないから.)
- (d) X の要素 x と Y の要素 y の組み合わせで $x < y$ となるものがある. — 真である. (例えば $2 \in X$, $3 \in Y$ で $2 < 3$ が成り立つから.)

以下省略.

(2) 上の命題の否定を記し、できるだけ自然な日本語で言い表せ. — 解答省略

(3) 集合 X, Y によらず次が成り立つ. ($\square$ 内に (b), (c), (b'), (c') を入れよ.)

$$(a) \iff (a') \begin{array}{l} \nearrow \square(b') \\ \searrow \square(c) \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \square(b) \\ \Rightarrow \square(c') \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} (d) \iff (d')$$

この理由を簡潔に説明せよ.

(解説) 限定記号が 2 つ (以上) ある命題は右から括弧でくくって考えるとよい. 例えば

$$(b) \quad \forall x \in X, (\exists y \in Y, x < y)$$

$$(b') \quad \exists y \in Y, (\forall x \in X, x < y)$$

(b) は、「 $x \in X$ のどれをとってみても、 $(\exists y \in Y, x < y)$ という条件が成り立つ」、すなわち、

「どんな $x \in X$ をとってみても、(その x に応じて) $x < y$ が成り立つような $y \in Y$ を選ぶことができる」

「 X の要素 x のどれを考えても、その x より大きい Y の要素が存在する」

という意味である.

一方 (b') は、「 $(\forall x \in X, x < y)$ という条件を満たす $y \in Y$ が存在する」、

「ある $y \in Y$ を見つけて、どんな $x \in X$ に対しても $x < y$ が成り立つようにできる。」

「 Y の要素 y を適切に選ぶと、その y は X の要素のどれよりも大きい」

という意味である.

(b') が成り立つなら、すなわち Y の要素で X のどれよりも大きいものがあるなら (b) も成り立つ. しかし、(b) が成り立つというのは、それぞれの x に応じて、それより大きい y がとれるというだけであって、このような y を x に依らずに選べるとは限らない.

したがって (b) が成り立っても (b') が成り立つとは限らない. 実際 (1) の具体例では (b) は真だが、(b') は偽である.