

日程

講義 (S2, S6 : 月 2) : 4/11, 18, 25, 5/2, 9, 18, 23, 30, 6/6, 13, 20, 27, 7/4, 11 (14 回)

演義 (S2: 木 1, S6: 木 2) : 4/14, 28, 5/19, 6/2, 16, 30, 7/14 (7 回)

参考書

- (1) 理工系の微分積分学, 吹田信之, 新保経彦, 学術図書
- (2) 微分積分学, 笠原皓司, サイエンス社
- (3) 解析入門 I, II, 杉浦光夫, 東大出版会

演義宿題 翌週火曜日 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

1 集合・写像・論理

集合

- 集合を指定する方法

列挙による. 例: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

要素が満たす条件を指定する. 例: $\{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の正整数}\}$

- $\emptyset$: 空集合 $\{\}$
- $x \in A$: x は A に属する. x は A の要素である.
- $A \subset B$: A は B の部分集合. (A, B が一致してもよい)
- 集合 A, B に対して

$A \cup B$: A, B の和集合. $A \cap B$: A, B の共通部分

- 考察する全体集合 X を前もって定めたとき

$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ を A の (X における) 補集合という

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (ドモルガンの法則)

- 数の集合

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: 自然数全体

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: 整数全体

$\mathbf{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbf{Z}, m \neq 0\}$: 有理数全体

$\mathbf{R}$: 実数全体, 実数直線

$\mathbf{C}$: 複素数全体, 複素(数)平面

論理

(I) P, Q を命題（真偽が定まる主張）とする.

- $P \wedge Q$: P かつ (and) Q
 $P \vee Q$: P または (or) Q
- $\neg P$: P の否定
 $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q) \quad (\text{ドモルガンの法則})$
- $P \Rightarrow Q$: P ならば Q . P は Q の 条件, Q は P の 条件
これは $(\neg P) \vee Q$ と同値. また $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (対偶) と同値.

(II) “ x は P という性質をもつ” という命題は x に具体的なものを代入すると真偽が定まる. このような命題 $P(x)$ を命題関数 (または述語) という. $P(x)$ を満たす x がどれだけあるかを問題にする場面では次の限定記号を使うと便利である:

- $\forall$ (全称記号 all, any) $\exists$ (存在記号 exists)
 - (1) $\forall x, P(x)$: すべての x について $P(x)$ が成り立つ. 任意の x について $P(x)$ が成り立つ.
 - (2) $\exists x, P(x)$: 少なくとも一つの x について $P(x)$ が成り立つ. 或る x について $P(x)$ が成り立つ. $P(x)$ を満たす x が存在する.
(注1) $\forall$ を後に置いて, $P(x) (\forall x)$ とすることもある. (英語でいうと $P(x)$ for all x となるから.)
(注2) $\exists$ の後に s.t. (such that の略) をいれて $\exists x, \text{s.t. } P(x)$ と表わすこともある. 「条件 $P(x)$ を満たす ような x 」という意味.
- x として, 集合 X に属する要素だけを問題にするときは
 - (1) $\forall x \in X, P(x)$ または $\forall x(x \in X \Rightarrow P(x))$
 X に属する x のすべてについて $P(x)$ が成り立つ. x が X に属すならば $P(x)$ が成り立つ.
 - (2) $\exists x \in X, P(x)$ または $\exists x(x \in X \text{ かつ } P(x))$:
 X に属する x の少なくとも一つについて $P(x)$ が成り立つ. X に属しかつ $P(x)$ を満たす x が存在する
- これらの否定は
 - (1) $\exists x \in X, \neg P(x)$ または $\exists x(x \in X \text{ かつ } \neg P(x))$
 X に属する x の少なくとも一つについて $P(x)$ が成り立たない.
 - (2) $\forall x \in X, \neg P(x)$ または $\forall x(x \in X \Rightarrow \neg P(x))$:
 X に属する x のどれをとっても $P(x)$ が成り立たない.

- 例 (1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$ 「すべての実数 x について, $x^2 \geq 0$ 」 — 真
 この否定は
 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$ 「少なくとも一つの実数 x について, $x^2 < 0$ 」 — 偽
- (2) $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 2$ 「 $x^2 = 2$ となる有理数 x が存在する」 — 偽
 この否定は
 $\forall x \in \mathbf{Q}, x^2 \neq 2$ 「すべての有理数 x について $x^2 \neq 2$ 」 — 真

注 限定記号 $\forall$ や $\exists$ がついていて変数を束縛変数という. 束縛変数を表わす文字は他の文字に置き換えても命題の意味は変わらない.

写像

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ とは:

集合 X (始集合, 定義域) の各要素 x に Y (終集合) の要素のひとつ $f(x)$ を対応させる対応関係. Y が数の集合のとき f を関数という場合が多い.

- (1) f が全射であるとは $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$
- (2) f が単射であるとは $\forall x_1, x_2 \in X, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
- (3) f が全射かつ単射のとき, 全単射という.

- $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ を y の逆像という. これは X の部分集合 (空集合かもしれない).

$f^{-1}(y)$ がただ1つの要素 x からなる集合 $\{x\}$ のとき, (要素 x と, x という要素ただ1つからなる集合 $\{x\}$ とは, 別のものなのだが用語を流用して) この x を y の逆像といい $f^{-1}(y)$ で表わすことが多い.

- (1) f が全射であることは 「 $\forall y \in Y, (f^{-1}(y) \text{ が } \boxed{})$ 」 と同値
- (2) f が単射であることは 「 $\forall y \in Y, (f^{-1}(y) \text{ が } \boxed{})$ 」 と同値

- A が X の部分集合のとき

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

を A の f による像という.

2 実数の性質

実数全体からなる集合 $\mathbf{R}$ は次の性質をもっている:

[1] 四則演算 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して, 和 $a + b$, 積 ab が定まり, 次の法則を満たす:

- (1) 和の結合法則: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (2) 和の交換法則: $a + b = b + a$

- (3) 零の存在: $0 \in \mathbf{R}$ があって, $\forall a \in \mathbf{R}, a + 0 = a$.
- (4) 和の逆元の存在: $\forall a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, a + b = 0$ (この b を $-a$ で表わす)
- (5) 積の結合法則: $(ab)c = a(bc)$
- (6) 積の交換法則: $ab = ba$
- (7) 1 の存在: $1 \in \mathbf{R}$ があって, $\forall a \in \mathbf{R}, 1a = a$
- (8) 積の逆元の存在: $\forall a \neq 0, \exists b \in \mathbf{R}, ab = 1$ (この b を $1/a$ で表わす)
- (9) 分配法則: $a(b + c) = ab + ac$
- (10) $0 \neq 1$

[2] 順序 $\forall a, b \in \mathbf{R}$ に対して $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立ち, 次の法則を満たす.

- (1) 反射律 $a \leq a$
- (2) 同値律 $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
- (3) 推移律 $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$
- (4) 順序と和 $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- (5) 順序と積 $a, b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

[3] 連続性 『 $\mathbf{R}$ の空でない部分集合が上に有界であれば上限をもつ.』

ただし, 次のように定義する.

定義 $A \subset \mathbf{R}, A \neq \emptyset$ とするとき,

- (1) 実数 m が A の最大数 ($\max A$) であるとは: 『 $m \in A$ かつ $\forall x \in A, x \leq m$ 』
 実数 m' が A の最小数 ($\min A$) であるとは: 『 $m' \in A$ かつ $\forall x \in A, x \geq m'$ 』
- (2) 実数 u が A の上界であるとは: 『 $\forall x \in A, x \leq u$ 』
 実数 ℓ が A の下界であるとは: 『 $\forall x \in A, x \geq \ell$ 』
- (3) A の上界が存在するとき, 集合 A が上に有界であるという.
- (4) 集合 A が上に有界のとき, A の上界全体のなす集合 $U = \{u \in \mathbf{R} \mid \forall x \in A, x \leq u\}$ の最小数 $\min U$ を, A の上限 ($\sup A$) という.
 集合 A が下に有界のとき, A の下界全体のなす集合 $L = \{\ell \in \mathbf{R} \mid \forall x \in A, x \geq \ell\}$ の最大数 $\max L$ を, A の下限 ($\inf A$) という.

実数の性質はすべて, 上に挙げたことから導くことができる.

演習

- 1 次の集合の上限, 下限, 最大数, 最小数を (存在すれば) 求めよ:

$$(1) \quad A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}, \quad (2) \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$$

- 2 自然数全体からなる集合 $\mathbf{N}$ は上に有界ではない. (アルキメデスの原理) これを次のように証明する. の中に「少なくとも 1 つの」, 「すべての」, 「上界である」, 「上界ではない」のどれかを入れよ.

(証明) 背理法による. $\mathbf{N}$ が上に有界であると仮定すると, 実数の連続性より $\mathbf{N}$ の上限 $\sup \mathbf{N}$ が存在する. これを s とする.

s は $\mathbf{N}$ の から, 自然数 n について $n \leq s$ が成り立つ (*).

一方, $s - 1$ は $\mathbf{N}$ の から, 自然数 m について $s - 1 < m$ が成り立つ. このとき自然数 $m + 1$ について $s < m + 1$ が成り立つことになり (*) と矛盾する.

よって $\mathbf{N}$ が上に有界であるという仮定は正しくない.

(注) アルキメデスの原理は「任意の実数 $a > 0, b > 0$ に対して $na > b$ となる自然数 n が存在する.」という形で述べられることが多い.

- 3 X, Y を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合として次の 8 個の命題を考える.

- (a) $\forall x \in X, \forall y \in Y, x < y$
- (b) $\forall x \in X, \exists y \in Y, x < y$
- (c) $\exists x \in X, \forall y \in Y, x < y$
- (d) $\exists x \in X, \exists y \in Y, x < y$
- (a') $\forall y \in Y, \forall x \in X, x < y$
- (b') $\exists y \in Y, \forall x \in X, x < y$
- (c') $\forall y \in Y, \exists x \in X, x < y$
- (d') $\exists y \in Y, \exists x \in X, x < y$

(前半の 4 命題の x に関する条件と y に関する条件の位置を入れ替えたものが後半の 4 命題.)

- (1) 上の命題をできるだけ自然な日本語で言い表せ. また,

$$X = \{2, 4, 6, \dots\} \quad (\text{正の偶数全体}), \quad Y = \{1, 3, 5, \dots\} \quad (\text{正の奇数全体})$$

とすると上の命題は真か偽か, 簡単な理由をつけて答えよ.

- (2) 上の命題の否定を記し, できるだけ自然な日本語で言い表せ.

(3) 集合 X, Y によらず次が成り立つ. ($\square$ 内に (b), (c), (b'), (c') を入れよ.)

$$(a) \iff (a') \begin{array}{l} \nearrow \square \implies \square \\ \searrow \square \implies \square \end{array} \begin{array}{l} \implies \square \\ \implies \square \end{array} \begin{array}{l} \searrow \square \iff (d) \\ \searrow \square \iff (d') \end{array}$$

この理由を簡潔に説明せよ.

宿題 4月19日(火) 11:00 までに, 全学共通科目レポートボックスに提出

解答には, 記号 $\forall, \exists$ を用いず, 日本語として意味の通る文章で書いてください.

1 $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A, B \subset X$ とする.

(1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ.

(ヒント: $f(A \cap B)$ に属する要素が $f(A) \cap f(B)$ に属することを示す.)

(2) $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ となる $f: X \rightarrow Y$ と A, B の (できるだけ簡単な) 例を挙げよ.

2 x は実数で, 任意の自然数 n に対して $|x| < 1/n$ が成り立つとする. このとき $x = 0$ であることを示せ. (ヒント: アルキメデスの原理を用いる.)

3 A, B は $\mathbf{R}$ の空でない部分集合で, 上に有界とする.

(1) 「 A に属する数 a のどれを考えても, その a より以上の数を B の中に見出すことができる」ならば, $\sup A \leq \sup B$ が成り立つことを示せ.

(2) 上の逆は成り立つか? 正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

4 U 君の質問:

「アルキメデスの原理 (どんな実数 x に対しても, それより大きい自然数 n がつけられる) の証明って, どうしてこんなに回りくどいのですか? x を小数で表わして, その小数点以下を切り上げたものを n とするといえは証明が済むのではないですか?」

U 君が納得するような説明をしてあげてください.