微分積分学 A (1S2,1S6) 中間試験解答例

$\boxed{1}$ (1) 任意の正数 ε に対して，番号 N を十分大きく選べば，N 以降の番号 n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

(2) 適当な実数 M をとると，すべての 番号 n について $|a_n| \le M$ が成り立つ．

（「すべての番号 n に対して $|a_n| \le M$ を満たす M が存在する.」という答は，２通りの解釈ができるから，不正解.）

(3) 数列 $\{a_n\}_n$ が α に収束すると仮定する．正数 ε をひとつ決めて固定する.（例えば $\varepsilon = 1$ とする.）この ε に対して，番号 N を，『$n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$』が成り立つようにとる．こうすれば $n \ge N$ のとき $|a_n| \le |\alpha| + \varepsilon$ が成り立つ．$M = \max(|\alpha| + \varepsilon, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|)$ とおけば，すべての n について $|a_n| \le M$ が成り立つ．したがって数列 $\{a_n\}_n$ は有界である．

$\boxed{2}$ すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して a_n が定まり，$a_n > 0$ である．

（ア）すべての n について $a_n \le 2$ が成り立つ．まず $0 < a_1 \le 2$ である．また $0 < a_n < 2$ ならば $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{4} = 2$ である．

次に，不等式 $a_n \le a_{n+1}$ がすべての $n = 1, 2, \ldots$ について成り立つことを示そう．まず $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{3}$ だから，この不等式は $n = 1$ のとき成り立つ．また，関数 $\sqrt{x+1}$ は x の増加関数だから $a_n \le a_{n+1}$ が成り立てば $a_{n+1} \le a_{n+2}$ も成り立つ．したがって帰納法により，すべての n について $a_n \le a_{n+1}$ が成り立つ．すなわち $\{a_n\}_n$ が増加数列である．

与えられた数列は上に有界な増加数列だから収束する．

この極限を α とする．$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ の $n \to \infty$ の極限をとると $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$．これを満たす α の値は 2 のみである．

$\boxed{3}$ (1) $\alpha = \angle PAO,\ \beta = \angle PBO$ とすると $\theta = \alpha - \beta = \tan^{-1}\dfrac{x}{a} - \tan^{-1}\dfrac{x}{b}$

(2) $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{x^2 + a^2} - \frac{b}{x^2 + b^2} = \frac{(b-a)(ab - x^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

$0 < x < \sqrt{ab}$ のとき $d\theta/dx > 0$, $\theta'(\sqrt{ab}) = 0$, $\sqrt{ab} < x$ のとき $\theta'(x) < 0$．これより，θ が最大となるのは $x = \sqrt{ab}$ のときである．

（注） $\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x/a - x/b}{1 + x^2/(ab)} = \dfrac{(b-a)x}{x^2 + ab}$ だから

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{(b-a)x}{x^2 + ab}$.　　また，$\theta = \cos^{-1}\dfrac{x^2 + ab}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \sin^{-1}\dfrac{(b-a)x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$.

$\boxed{4}$ $f(x) = \log x$ の k 次導関数は $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$ $(k \ge 1)$

$f(2) = \log 2,\ f^{(k)}(2) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{2^k}$ $(k \ge 1)$

したがって

$$\log x = \log 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k}(x-2)^k + o(x^n)$$

または

$$\log x = \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^k + o(x^n)$$

$\boxed{5}$ f が恒等的に 0 であれば，すべての点で $f'(c)=0$ だから題意は成り立つ．

$f(x_0)\neq 0$ なる点 x_0 があるとする．以下では $f(x_0)>0$ と仮定する．($f(x_0)<0$ の場合も同様に議論できる．— または $f(x)$ の代わりに $-f(x)$ を考える）

$m = f(x_0)$ とおく $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ だから，適当な $R>0$ をとると， $x\geq R$ のとき $|f(x)|<m$ が成り立つ．f は閉区間 $[-R,R]$ で連続だからこの区間における最大値を，ある点 $c\in[-R,R]$ でとる．すなわち $x\in[-R,R]$ ならば $f(x)\leq f(c)$．また $|x|>R$ のときは $f(x)<m=f(x_0)\leq f(c)$ である．

よって $f(c)$ は x が $\mathbb{R}$ 全体を動くときの最大値でもある．

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \begin{cases} >0 & (x<c \text{ のとき}) \\ <0 & (x>c \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．仮定により，この $x\to c$ のときの極限値 $f'(c)$ が存在するが，この値は $\lim_{x\to c-0}(f(x)-f(c))/(x-c)>$ および $\lim_{x\to c+0}(f(x)-f(c))/(x-c)<0$ に一致しなくてはならない．したがって $f'(c)=0$ である．