微分積分学 A 中間試験問題 (上田) 2016年6月13日

1 次の問に答えよ。(記号 $\forall, \exists$ を用いず, できるだけ自然な日本語で表現すること.)

- (1) 数列 $\{a_n\}_n$ が α に収束するということの定義を述べよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}_n$ が有界であるということの定義を述べよ
- (3) 上の定義に基づいて, 収束する数列が有界であることを示せ.

2 次の数列が収束することを示せ. またその極限値を求めよ:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3 x, y 平面上に点 $A = (0, a), B = (0, b)$ ($0 < a < b$) がある. また $P = (x, 0)$ を x 軸上の動点とする.

- (1) 角 $\theta = \angle APB$ を x の関数として表わせ.
- (2) θ が最大となるときの x の値を求めよ.

4 関数 $f(x) = \log x$ ($x > 0$) を $x = 2$ の周りで近似する n 次多項式を求めよ.

5 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で微分可能な関数とする. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ならば $f'(c) = 0$ となる点 $c \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ.