

宿題解答例

[1] 重積分の値を求めよ：

$$(1) \quad \iint_E (x^2 + y^2) dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$$

$$(2) \quad \iint_E \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(解答例)

(1) 変数変換 $x = 2r \cos \theta$, $y = 3r \sin \theta$ によって $D = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は E の上にうつる. この写像は D の内部では 1 対 1 写像で, ヤコビ行列式は $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} =$

$$\begin{vmatrix} 2 \cos \theta & -2r \sin \theta \\ 3 \sin \theta & 3r \cos \theta \end{vmatrix} = 6r. \quad \text{よって求める積分は}$$

$$\int_D (4r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta) 6r dr d\theta = \int_0^1 6r^3 dr \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{39\pi}{2}.$$

(2) 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって $D = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ は E の上にうつる. これは $r = 0$ の部分を除いて 1 対 1 で, ヤコビ行列式は r . よって

$$\iint_D \theta r dr d\theta = \int_0^a r dr \int_0^{\pi/2} \theta d\theta = \frac{\pi^2 a^2}{16}.$$

注：被積分関数 $\tan^{-1}(y/x)$ は $(0, 0)$ においては定義されていない. また値をどう定めても連続にはならない. しかし面積 0 の部分を除いて連続な有界関数だから重積分可能である.

[2] 次の広義積分の値を求めよ：

$$\iint_E x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

(解答例) E を近似する領域として $E_R = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ をとる. 極座標変換で $D_R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ は E_R に対応する. よって

$$\begin{aligned} \iint_{E_R} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{D_R} r^2 \cos^2 \theta e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 e^{-r^2} dr \longrightarrow \frac{\pi}{8} \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(注) 近似列として $E_R = [0, R] \times [0, R]$ をとって,

$$\iint_{E_R} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R x^2 e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy \longrightarrow \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} \quad (R \rightarrow \infty).$$

としてもよい.

- 3 次の広義積分が収束するような α の 範囲を求めよ．またそのときの積分の値を求めよ：

$$\iint_E \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$

(解答例) E を近似する集合として $E_R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ($R \geq 1$) をとる． E_R 上の重積分を極座標変換によって計算する． $D_R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ として

$$\begin{aligned} \iint_{E_R} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy &= \iint_{D_R} r^{3-2\alpha} \sin^2 \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_1^R r^{3-2\alpha} dr \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{4-2\alpha} (R^{4-2\alpha} - 1) & (\alpha \neq 2) \\ \pi \log R & (\alpha = 2) \end{cases} \end{aligned}$$

これは、 $\alpha > 2$ ならば、 $R \rightarrow \infty$ のとき、 $\pi/(2\alpha - 4)$ に収束する．また $\alpha \leq 2$ のとき発散する．

与えられた広義積分は $\alpha > 2$ のとき収束する．その値は $\pi/(2\alpha - 4)$ ．また $\alpha \leq 2$ のとき発散する．

- 4 半径 R の円に糸を巻きつけて、ゆるむことなくほどく．このとき糸の先端が描く曲線を円の伸開線 (インボリュート) という．これは次式で与えられる．

$$\begin{cases} x = R(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = R(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$$

図における角 θ が 0 から α ($0 < \alpha < 2\pi$) まで動くとき、糸が通過する範囲の面積を求めよ．

(解答例) 写像 $\Phi: (t, \theta) \mapsto (x, y)$ を

$$\begin{cases} x = R \cos \theta + t \sin \theta \\ y = R \sin \theta - t \cos \theta \end{cases}$$

によって定める． $D = \{(t, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq t \leq R\theta\}$ とおくと、糸が通過する範囲は $\Phi(D)$ で与えられる． Φ のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & -R \sin \theta + t \cos \theta \\ -\cos \theta & R \cos \theta + t \sin \theta \end{vmatrix} = t.$$

よって求める面積は

$$\iint_{\Phi(D)} dx dy = \iint_D t dt d\theta = \int_0^\alpha \left(\int_0^{R\theta} t dt \right) d\theta = \frac{R^2 \alpha^3}{6}.$$