

演習

1 重積分の値を求めよ：

$$(1) \quad \iint_E x \, dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 2, 1 \leq 3x - 2y \leq 3\}$$

$$(2) \quad \iint_E \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$$

(解答例)

(1) 線形写像 $(x, y) \mapsto (u, v)$ を $u = x + y$, $v = 3x - 2y$ で定める. これは $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への全単射. この逆写像を Φ とする. これは $x = \frac{1}{5}(2u + v)$, $y = \frac{1}{5}(3u - v)$ で与えられる.

Φ によって $D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3\}$ は E にうつされる. また Φ のヤコビ行列式は $-1/5$ である. よって求める重積分は

$$\iint_D \frac{1}{5}(2u + v) \left| -\frac{1}{5} \right| du dv = \frac{16}{25}.$$

(2) 極座標変換 $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ によって,

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos \theta, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$$

は E の上にうつる. この写像は D の境界を除いて 1 対 1 である.

$$\iint_D \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos \theta} \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr \right) d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\cos \theta} \sqrt{1 - r^2} \cdot r \, dr = \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{\cos \theta} = \frac{1}{3}(1 - |\sin \theta|^3)$$

よって求める重積分の値は

$$\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}$$

2 空間極座標変換によって次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_V z \, dx dy dz \quad V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

(解答例) この値が 0 であるのは明らかなので, 積分範囲を

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

として答える.

$$D = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

とくと、極座標変換

$$(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

によって D は V の上にうつされる．これは D の境界を除いて 1 対 1 写像である．また、このヤコビ行列式は $r^2 \sin \theta$ である．したがって

$$\iiint_D r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi = \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{4}.$$

(注) 空間極座標を用いずに

$$\iint_E \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx dy = \iint_E \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-r^2) r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

などとしてもよい．

3 広義積分

$$\iint_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}, \quad E = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

が存在するために α が満たすべき条件を求めよ．またそのときの広義積分の値を求めよ．

(解答例) E の近似列として

$$K_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

をとる．

$\alpha \neq 1$ のとき、

$$\iint_{K_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 2\pi \int_{1/n}^1 r^{1-2\alpha} \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{2-2\alpha} r^{2-2\alpha} \right]_{r=1/n}^1 = \frac{\pi}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \right)$$

これは、 $\alpha < 1$ ならば $n \rightarrow \infty$ のとき $\pi/(1-\alpha)$ に収束する．また $\alpha > 1$ ならば (∞ に) 発散する．

$\alpha = 1$ のとき、

$$\iint_{K_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 2\pi \int_{1/n}^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \log n$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき発散する．

したがって与えられた広義積分は $\alpha < 1$ のとき収束し、その値は $\pi/(1-\alpha)$ ． $\alpha \geq 1$ のとき発散する．

4 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする． $[a, b]$ 上の関数 $f_n(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t) \, dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める (n 次原始関数)．このとき

$$f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であることを示せ．

(解答例) まず,

$$f_n(x) = \int_a^x dt_n \int_a^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1$$

は n 重積分に書き換えることができる:

$$f_n(x) = \int \cdots \int_V f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

ここで

$$V = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid a \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq x\}$$

とした. 超平面 $t_1 = \text{定数}$ による V の切り口を

$$V(t_1) = \{(t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \mid t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq x\} \quad (a \leq t_1 \leq x)$$

とすると, この n 重積分は次のように書きなおすことができる.

$$\begin{aligned} & \int_a^x \left(\int \cdots \int_{V(t_1)} f(t_1) dt_2 \cdots dt_n \right) dt_1 \\ &= \int_a^x f(t_1) \left(\int \cdots \int_{V(t_1)} dt_2 \cdots dt_n \right) dt_1 \\ &= \int_a^x f(t_1) \frac{(x-t_1)^{n-1}}{(n-1)!} dt_1 \end{aligned}$$

積分変数 t_1 を t で置き換えたものが題意の等式である.

5 次のような平面上の集合列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ の例をつくれ:

- (i) 各 K_n は有界閉集合.
- (ii) $\{K_n\}$ は増大列で $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \mathbf{R}^2$.
- (iii) 有界閉集合 L で, どの K_n にも含まれないものが存在する.

(解答例) たとえば

$$K_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq n^2\} \cup \{(0, 0)\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくと (i), (ii) が満たされることは容易にわかる. また $L = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, ここで r は任意の正数, とすると, どの n についても $L \not\subset K_n$ となる. よって (iii) も満たされる.

(*) $K_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x}{n} \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$ などとしてもよい.