微分積分学B 演義 (S2, S6) No.7　　2017年 1月19日

1　重積分の変数変換

E を (x,y) 平面上の面積確定有界閉集合，f を E 上の連続関数とすると，重積分 $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ が定まる．これを変数変換によって計算したい．

次のような $\Phi\colon U \to V$ がとれたとする．

- U は (u,v) 平面の領域，V は (x,y) 平面の領域で $E \subset V$．
- 写像 $\Phi\colon U \to V$ は全単射，C^1 級，そのヤコビ行列式は 0 にならない．
  すなわち $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ とするとき $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ が C^1 級で

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (\forall (u,v) \in U)$$

定理 このとき $D = \Phi^{-1}(E)$ とおくと，次が成り立つ．

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(u,v))|\,dudv.$$

特別の場合として

$$(E \text{ の面積}) = \iint_E dxdy = \iint_D |J(u,v))|\,dudv.$$

例 1．線形写像 $\Phi\colon (u,v) \mapsto (x,y) = (au+bv, cu+dv)$,　$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = ad-bc.$

2．極座標変換 $\Phi\colon (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,　$J_\Phi(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.

＊ n 重積分についても同様の変数変換公式が成り立つ．空間極座標変換

$$\Phi : (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta,)$$

のヤコビ行列式は $J(r,\theta,\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$.

2　広義積分

重積分の概念を，一般の（有界とは限らない）集合 E や，(有界とは限らない）関数 f の場合に拡張する．

定義 次のような集合列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ を E の近似列という．

(i)　各 K_n は面積確定な有界閉集合．

(ii)　$\{K_n\}$ は増大列（$K_1 \subset K_2 \subset \cdots$）で $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = E$.

(iii)　E に含まれる任意の有界閉集合 L に対して，$L \subset K_n$ となる番号 n が存在する．

例 (1) $K_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2\},\ (n = 1, 2, \ldots)$ は $\mathbf{R}^2$ の 近似列.

(2) $K'_n = \{\max(|x|, |y|) \leq n\},\ (n = 1, 2, \ldots)$ も $\mathbf{R}^2$ の近似列.

(3) $K_n = \{\frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\},\ (n = 2, 3, \ldots)$ は $E = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1)\}$ の近似列.

定義 E 上の連続関数 f が E で広義重積分可能であるとは，E の任意の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ について $\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy$ が存在し，この極限が近似列のとり方によらないことをいう．この極限値を $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ で表わす.

定理 f が E で広義重積分可能 $\Longleftrightarrow$ ある近似列 $\{K_n\}$ について $\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} |f(x,y)|\,dxdy$ が存在する.

3 ガンマ関数とベータ関数

定義 ガンマ関数を次の広義積分で定義する.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\,dx \qquad (s > 0).$$

$x = t^2$ で変数変換すれば

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2s-1}\,dt.$$

定理 (1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\ (s > 0)$

(2) $\Gamma(1) = 1$. n が整数 ≥ 1 のとき $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. n が整数 ≥ 1 のとき $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

定義 ベータ関数を次の広義積分で定義する.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad (p, q > 0)$$

$x = \sin\theta$ で変数変換すれば

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$

定理 （B 関数と Γ 関数の関係）

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

演習

1 重積分の値を求めよ：

(1) $\displaystyle\iint_E x\,dxdy, \quad E=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 2,\ 1\le 3x-2y\le 3\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x\}$

2 空間極座標変換によって次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_V z\,dxdydz \quad V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

3 広義積分

$$\iint_E \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$$

が存在するために α が満たすべき条件を求めよ．またそのときの広義積分の値を求めよ.

4 $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．$[a,b]$ 上の関数 $f_n(x),\ (n=0,1,2,\ldots)$ を

$$f_0(x)=f(x), \qquad f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,2,\ldots)$$

で定める（n 次原始関数）．このとき

$$f_n(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \quad (n=1,2,\ldots)$$

であることを示せ.（ 1 変数微積分の範囲でできる（教科書 112 頁）が，ここでは $f_n(x)$ が n 重積分で表わせることを用いてみよ.）

5 次のような平面上の集合列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ の例をつくれ：

(i) 各 K_n は有界閉集合.

(ii) $\{K_n\}$ は増大列で $\bigcup_{n=1}^\infty K_n=\mathbf{R}^2$.

(iii) 有界閉集合 L で，どの K_n にも含まれないものが存在する.

宿題　1月24日（火）11:00 までに，全学共通科目レポートボックスに提出

1 重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_E (x^2+y^2)\,dxdy, \quad E=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dxdy, \quad E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,\, x\ge 0, y\ge 0\}$

2 次の広義積分の値を求めよ：

$$\iint_E x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad E=\{(x,y)\mid x\ge 0,\, y\ge 0\}$$

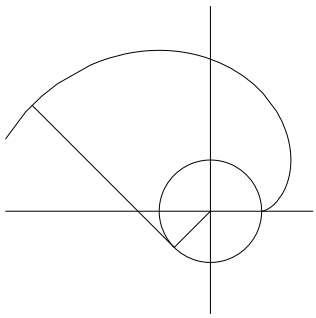
3 次の広義積分が収束するような α の 範囲を求めよ．またそのときの積分の値を求めよ：

$$\iint_E \frac{y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy, \quad E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 1\}$$

4 半径 R の円に糸を巻きつけて，ゆるむことなくほどく．このとき糸の先端が描く曲線を円の伸開線（インボリュート）という．これは次式で与えられる．

$$\begin{cases} x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}$$

図における角 θ が 0 から α $(0\alpha<2\pi)$ まで動くとき，糸が通過する範囲の面積を求めよ．



（ヒント）次の変数変換 $(t,\theta)\mapsto(x,y)$ を考える：

$$\begin{cases} x=R\cos\theta+t\sin\theta \\ y=R\sin\theta-t\cos\theta \end{cases}$$