微分積分学Ｂ 演義 (S2, S6)　No.6　　2017 年 1 月 5 日

宿題解答例

$\boxed{1}$ 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_K \cos(x+y)\,dxdy, \quad K=[0,\pi/2]^2$

(2) $\displaystyle\iint_E xy\,dxdy, \quad E=\{(x-2)^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_E x^2e^{y^2}\,dxdy, \quad E=\{0\le x\le y\le 1\}$

（解答例）

(1)
$$\begin{aligned}
\iint_K \cos(x+y)\,dxdy &= \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)dy\Big)dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\Big[\ \sin(x+y)\Big]_{y=0}^{\pi/2}dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\Big(\sin\big(x+\frac{\pi}{2}\big)-\sin x\Big)dx\\
&= \Big[-\cos(x+\frac{\pi}{2})+\cos x\Big]_0^{\pi/2}=0.
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\iint_E xy\,dxdy &= \int_1^3\Big(\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}}xydy\Big)dx\\
&= \int_1^3\Big[\frac{1}{2}xy^2\Big]_{y=0}^{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx\\
&= \int_1^3\frac{1}{2}x(1-(x-2)^2)\,dx=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(t+2)(1-t^2)\,dt=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\iint_E x^2e^{y^2}\,dxdy &= \int_0^1\Big(\int_0^y x^2e^{y^2}dx\Big)dy\\
&= \int_0^1\frac{y^3}{3}e^{y^2}\,dy=\frac{1}{6}\int_0^1 ue^u\,du=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ において

$$V_n(a)=\big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \ \mid\ 0\le x_1\le\cdots\le x_n\le a\big\}\qquad (a>0)$$

とする．次を示せ： $\displaystyle\int\cdots\int_{V_n(a)}dx_1\cdots dx_n=\frac{a^n}{n!}.$

（解答例１）$V_n(a)$ の超平面 $x_n=$ 定数 による切り口は

$$V_{n-1}(x_n)=\big\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\ \mid\ 0\le x_1\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n\big\}\qquad (0\le x_n\le a)$$

だから，求める積分は $\displaystyle\int_0^a\Big(\int\cdots\int_{V_{n-1}(x_n)}dx_1\cdots dx_{n-1}\Big)dx_n$ と書きなおせる．

さらに ( ) の中は $\displaystyle\int_0^{x_n}\Big(\int\cdots\int_{V_{n-2}(x_{n-1})} dx_1\cdots dx_{n-2}\Big)dx_{n-1}$ と書きなおせる．これを繰り返せば求める積分は

$$(*)\qquad \int_0^a\Big(\cdots\Big(\int_0^{x_3}\Big(\int_0^{x_2}dx_1\Big)dx_2\Big)\cdots\Big)dx_n=\int_0^a dx_n\cdots\int_0^{x_3}dx_2\int_0^{x_2}dx_1$$

これを順に計算すれば（正確には帰納法によって）求める値は $a^n/n!$.

（解答例２） $E_{n-1}=\{(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^{n-1}\mid 0\le x_2\le\cdots\le x_n\le a\}$ とおくと，$V_n(a)=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid(x_2,\ldots,x_n)\in E_{n-1},0\le x_1\le x_2\}$ と表わせるから，求める積分は $\displaystyle\int\cdots\int_{E_{n-1}}\Big(\int_0^{x_2}dx_1\Big)dx_2\cdots dx_n$ これを繰り返すことによっても (*) が得られる．

（解答例３） 累次積分の順序を変えて $\displaystyle\int_0^a dx_1\cdots\int_{x_{n-2}}^a dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^a dx_n$ としてもよい．

（解答例４） 文字 $1,2,\ldots,n$ の置換全体（n 次対称群）を S_n で表わす． 各置換 $\sigma\in S_n$ に対して

$$V^\sigma=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid 0\le x_{\sigma(1)}\le\cdots\le x_{\sigma(n)}\le a\}$$

とおくと V^σ $(\sigma\in S_n)$ たちは互いに合同だから体積は等しい．V^σ たちが，１辺の長さ a の n 次元立方体を埋め尽くす．したがって各 V^σ の体積は立方体の体積 a^n の $1/n!$ 倍である．

$\boxed{3}$ (1) 写像 $(\rho,\phi,z)\mapsto(x,y,z)$ を $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z$ で定める（円柱座標，円筒座標）．このヤコビ行列，ヤコビ行列式を計算せよ．

(2) 写像 $(r,\theta,\phi)\mapsto(\rho,\phi,z)$ を $\rho=r\sin\theta,\ \phi=\phi,\ z=r\cos\theta$ で定める．このヤコビ行列，ヤコビ行列式を計算せよ．

(3) 写像 (2), (1) の合成写像 $(r,\theta,\phi)\mapsto(x,y,z)$ は $x=r\sin\theta,\ \phi=\phi,\ z=r\cos\theta$ で定まる（空間極座標）．連鎖律を用いて，ヤコビ行列，ヤコビ行列式を計算せよ．

（解答） ヤコビ行列は次の通り．

$$(1)\quad \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial x}{\partial\phi}&\frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\phi}&\frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\phi}&\frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi&-\rho\sin\phi&0\\ \sin\phi&\rho\cos\phi&0\\ 0&0&1\end{pmatrix},\qquad \text{行列式は }\rho$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial r}&\frac{\partial\rho}{\partial\theta}&\frac{\partial\rho}{\partial\phi}\\ \frac{\partial\phi}{\partial r}&\frac{\partial\phi}{\partial\theta}&\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta&r\cos\theta&0\\ 0&0&1\\ \cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix},\qquad \text{行列式は }r$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi&-\rho\sin\phi&0\\ \sin\phi&\rho\cos\phi&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta&r\cos\theta&0\\ 0&0&1\\ \cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi&r\cos\theta\cos\phi&-\rho\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&\rho\cos\phi\\ \cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi&r\cos\theta\cos\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix}.$$

行列式は $\rho r=r^2\sin\theta$