微分積分学 B 演義 (S2, S6)　No.6　　　2017 年 1 月 5 日

演習解答例

$\boxed{1}$ 重積分の値を求めよ：

$$(1)\quad \iint_K (x+2y)\,dxdy, \quad K=[0,2]\times[0,3] \qquad (2)\quad \iint_K ye^{xy}dxdy, \quad K=[0,2]\times[0,3]$$

（解答例）

(1) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_0^3 (x+2y)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 \Big[xy+y^2\Big]_{y=0}^3 dx = \int_0^2 (3x+9)dx = 24.$

(2) 先に x について積分すれば次のようになる：

$$\iint_K ye^{xy}dxdy = \int_0^3 \Big(\int_0^2 ye^{xy}dx\Big)dy = \int_0^3 \Big[\,e^{xy}\,\Big]_{x=0}^2 dy = \int_0^3 \big(e^{2y}-1\big)dy = \frac{1}{2}(e^6-7).$$

先に y について積分すると少し手間がかかる： $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^3 ye^{xy}dy$ とおくと，求める重積分は $\displaystyle\iint_K ye^{xy}\,dxdy = \int_0^2 \varphi(x)\,dx$ である． $x\neq 0$ のときは

$$\varphi(x) = \int_0^3 ye^{xy}dy = \int_0^3 \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}\big(e^{xy}\big)dy = \Big[\frac{y}{x}e^{xy}\Big]_{y=0}^3 - \int_0^3 \frac{1}{x}e^{xy}dy = \frac{3}{x}e^{3x} - \frac{1}{x^2}(e^{3x}-1)$$

$x = 0$ のときは $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^3 y\,dy = 9/2$. $\varphi(x)$ は 0 で 連続．この原始関数（のひとつ）として $\Phi(x) = \frac{1}{x}(e^{3x}-1)\ \ (x\neq 0)$, $\Phi(0)=3$ がとれる．よって $\displaystyle\int_0^3 \varphi(x)dx = \Phi(3)-\Phi(0)$ が求める値である．

$\boxed{2}$ 集合 E を図示し，重積分の値を求めよ：

(1) $\displaystyle\iint_E y\,dxdy, \quad E=\big\{x\le y,\ y^2\le x\big\}$

(2) $\displaystyle\iint_E xy\,dxdy, \quad E=\big\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1\big\}$

（解答例）

(1) E は $E=\{0\le x\le 1,\ x\le y\le \sqrt{x}\}$ という縦線領域として表すことができる．求める値は

$$\int_0^1 \Big(\int_x^{\sqrt{x}} y\,dy\Big)dx = \int_0^1 \Big[\,\frac{1}{2}y^2\,\Big]_{y=x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x-x^2)\,dx = \frac{1}{12}$$

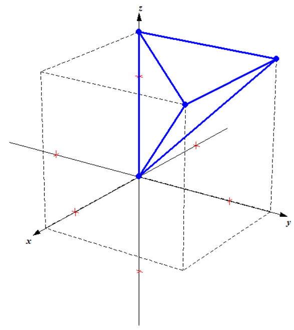
横線領域 $E=\{0\le y\le 1,\ y^2\le x\le y\}$ とみなせば，求める値は

$$\int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{y} y\,dx\Big)dy = \int_0^1 y(y-y^2)dy = \frac{1}{12}.$$

(2) $E=\big\{0\le x\le 2,\, 0\le y\le 3-\dfrac{3}{2}x\big\}$ と表される．

$$\int_0^2 \Big(\int_0^{3-\frac{3}{2}x} xy\,dy\Big)dx = \int_0^2 \Big[\frac{1}{2}xy^2\Big]_{y=0}^{3-\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x(3-\frac{3}{2}x)^2\,dx = \frac{3}{2}.$$

$\boxed{3}$ 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ において $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le y \le z \le a\}$ とする．



(1) V を図示せよ．　(2) $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ の値を求めよ．

（解答例１） V を (x, y) 平面の領域 $E = \{(x, y) \mid 0 \le x \le y \le a\}$ の上の縦線領域とみなす．
$V = \{(x, y, z) \mid\ (x, y) \in E,\ y \le z \le a\}$．求める積分は

$$\iint_E \Big(\int_y^a dz\Big) dxdy = \iint_E (a - y) dxdy = \int_0^a \Big(\int_x^a (a - y) dy\Big) dx$$
$$= \int_0^a \Big[-\frac{1}{2}(a - y)^2\Big]_{y=x}^a dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a - x)^2\, dx = \frac{1}{6}a^2.$$

（解答例２） V を (y, z) 平面の領域 $E = \{(y, z) \mid 0 \le y \le z \le a\}$ の上の縦線領域とみなす．
$V = \{(x, y, z) \mid\ (y, z) \in E,\ 0 \le x \le y\}$．求める積分は

$$\iint_E \Big(\int_0^y dx\Big) dydz = \iint_E ydydz = \int_0^a \Big(\int_0^z y\, dy\Big) dz = \frac{1}{2}\int_0^a z^2\, dz = \frac{1}{6}a^2.$$

（解答例３） 平面 $z =$ 定数による V の切り口を E_z とする．

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y, z) \in V\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le y \le z\} \qquad (0 \le z \le a).$$

求める積分は $\displaystyle\int_0^a \Big(\iint_{E_z} dxdy\Big) dz = \int_0^a \frac{1}{2}z^2 dz = \frac{1}{6}.$

$\boxed{4}$ 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 f, g に関するシュワルツの不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\, dx \int_a^b g(x)^2\, dx$$

を，重積分 $\displaystyle\iint_K \big\{f(x)g(y) - g(x)f(y)\big\}^2 dxdy$ を考察することによって，示せ．

（解答例） $I = [a, b],\ K = I^2$ と表わす．

$$\begin{aligned}
0 &\le \iint_K \big\{f(x)g(y) - g(x)f(y)\big\}^2 dxdy \\
&= \iint_K f(x)^2 g(y)^2\, dxdy - 2\iint_K f(x)g(y)g(x)f(y)\, dxdy + \iint_K g(x)^2 f(y)^2\, dxdy \\
&= \int_I f(x)^2\, dx \int_I g(y)^2\, dy - 2\int_I f(x)g(x)\, dx \int_I f(y)g(y)\, dy + \int_I g(x)^2\, dx \int_I f(y)^2\, dy \\
&= 2\left(\int_I f(x)g(x)\, dx\right)^2 - 2\int_I f(x)^2\, dx \int_I g(x)^2\, dx
\end{aligned}$$

よって題意の不等式が成り立つ．ここで，等号が成立するのは $f(x)g(y) - g(x)f(y) = 0$ がすべての $(x, y) \in I^2$ について成り立つとき，すなわち f, g が一次従属のときである．